# Mathématiques 30421

Module 6 (5 cours)
LE NOMBRE 1 – LE SYSTÈME NUMÉRIQUE
Probabilité
Chapitres 8 et 9 - Omnimath 12

## 1 Résultat d'apprentissage général

Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.

Utiliser les probabilités afin de prédire le résultat de situations incertaines d'ordre pratique et théorique.

## Résultat d'apprentissage spécifique

*L'élève doit pouvoir :*

1.2 modéliser des situations réelles à l'aide de la distribution binomiale

- ❖ Événements dépendants et indépendants

### 8.1 La probabilité et l'espace des échantillons

Dans ce chapitre, on cherche la probabilité qu'un événement se produise, on utilise souvent le mot chance dans le langage courant. Ex. : « quelle est la chance qu'il pleut aujourd'hui? »

Dans le langage de la probabilité, une expérience est une action dont les résultats sont mesurables ou quantifiables. Ex : Jette un dé et écris le nombre représenté sur la face du dessus.

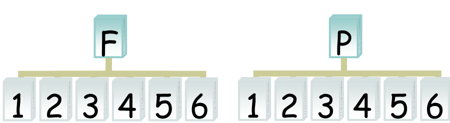
L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience s'appelle l'espace des échantillons. Un événement est un groupe de résultats possibles.

La différence entre un événement et un résultat : le résultat est ce que l'on peut obtenir et l'événement est ce qu'on veut obtenir.

Dans une expérience dont les résultats ont la même chance de se produire, on calcul la probabilité de la façon suivante :

$$P(\text{événement}) = \frac{\text{nombre total de résultats favorables de l'événement}}{\text{nombre total de résultats dans l'espace des échantillons}}$$

Ex : 1 : a) Détermine l'espace des échantillons d'une expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie et jeter un dé à six faces.




$\{F1,F2,F3,F4,F5,F6,P1,P2,P3,P4,P5,P6\}$, donc 12 résultats.

a) Détermine la probabilité de l'événement qui consiste à obtenir le côté face et un 5.

$$P(F,5) = \frac{1}{12}$$

b) Détermine la probabilité de l'événement qui consiste à obtenir le côté face et soit un 4 ou un 2.

$$P(F,4 \text{ ou } F,2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Ex 2 : Les statistiques sur le sang indiquent que 4% des Canadiens sont du groupe sanguin AB. Selon les sondages, on estime que 10% des gens sont gauchers. Suppose qu'il n'y a aucune relation entre le groupe sanguin et prévalence manuelle.

a) Estime la probabilité qu'une personne choisie au hasard au Canada soit gauchère et de groupe sanguin AB.

$$\{(\text{AB}, \text{gauche}), (\text{AB}, \text{droite}), (\text{pas AB}, \text{gauche}), (\text{pas AB}, \text{droite})\}$$
$$\{(0{,}04\text{x}0{,}1), (0{,}04\text{x}0{,}9), (0{,}96\text{x}0{,}1), (0{,}96, 0{,}9)\}$$

$$P(\text{AB}, \text{gauche}) = P(\text{AB})\text{x}P(\text{gauchère}) = 0{,}04\text{x}0{,}1 = 0{,}004$$

b) Dans un groupe de trois personnes choisies au hasard au Canada, estime la probabilité qu'au moins deux d'entre elles soient de groupe sanguin AB.

$$P(\text{au moins 2 AB}) = P(\text{3 AB}) + P(\text{2 AB})$$

$$P(\text{au moins 2 AB}) = P(\text{AB}, \text{AB}, \text{AB}) + P(\text{AB}, \text{AB}, \text{pas AB}) + P(\text{AB}, \text{pas AB}, \text{AB}) + P(\text{pas AB}, \text{AB}, \text{AB})$$

$$P(\text{au moins 2 AB}) = 0{,}04\text{x}0{,}04\text{x}0{,}04 + 0{,}04\text{x}0{,}04\text{x}0{,}96 + 0{,}04\text{x}0{,}96\text{x}0{,}04 + 0{,}96\text{x}0{,}04\text{x}0{,}04$$

$$P(\text{au moins 2 AB}) = 0{,}004672$$

Ex 8.1 p. 371 # 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13abc, 14, 15

- Probabilité d'un événement

8.2 Classifions des événements

Dans une expérience, deux événements sont indépendants lorsque la probabilité de chaque événement n'est pas modifiée par l'autre événement. Si les événements ne sont pas indépendants, ils sont dépendants.

Ex : Classifie les événements suivants comme indépendants ou dépendants.

a) On jette un dé et on lance une pièce de monnaie. Le premier événement est d'obtenir un 6, le deuxième est d'obtenir le côté pile. Indépendants

b) On jette deux dés. Le premier événement consiste à obtenir un nombre impair sur un dé; le deuxième événement consiste à obtenir un nombre pair sur l'autre dé. Indépendants

c) On interroge deux membres d'une même famille, soit une mère et son enfant. Le premier événement est que la mère soit blonde; le deuxième événement est que l'enfant soit blond. Dépendants, car c'est génétique.

d) On tire cinq cartes d'un jeu de cartes ordinaire. Le premier événement consiste à tirer une carte de pique en premier; le deuxième événement consiste à tirer une carte de pique en deuxième; le troisième événement consiste à tirer une carte de pique en troisième, et ainsi de suite. Dépendants, car la probabilité change chaque fois qu'une carte est tirée.

Ex. 2 :

a) Dans un groupe de six personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient le même mois de naissance?

On fait le calcul des chances qu'elles aient tous des mois de naissances différents, on le soustrait de 1.

$$P(\text{six différents mois}) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = 0{,}2228$$

$$P(\text{Au moins deux d'identiques}) = 1 - P(\text{six différents mois})$$

$$P(\text{Au moins deux d'identiques}) = 1 - 0{,}2228 = 0{,}7772$$

Il y a 78% de chance qu'au moins deux personnes aient le même mois de naissance.

b) Dans une classe de 35 élèves, quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient la même date de naissance?

$$P(\text{35 dates différentes}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \times \frac{360}{365} \text{x...x} \frac{331}{365} = \frac{{}_{365}P_{35}}{365^{35}} = 0{,}185616761$$

$$P(\text{Au moins deux d'identiques}) = 1 - P(\text{35 différentes dates}) = 1 - 0{,}185616761 = 0{,}8144$$

c) À combien d'élèves devrais-tu demander leur date de naissance pour qu'il y ait 50% de chances que deux d'entre eux aient la même date de naissance?

$$P(\text{2 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{2}}{365^{2}} = 0{,}99726$$

$$P(\text{3 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{3}}{365^{3}} = 0{,}991796$$

$$P(\text{10 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{10}}{365^{10}} = 0{,}88305$$

$$P(\text{15 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{15}}{365^{15}} = 0{,}747099$$

$$P(\text{20 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}} = 0{,}5885616$$

$$P(\text{25 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{25}}{365^{25}} = 0{,}431300$$

$$P(\text{23 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{23}}{365^{23}} = 0{,}4927028$$

$$P(\text{22 dates différentes}) = \frac{{}_{365}P_{22}}{365^{22}} = 0{,}524305$$

Donc, il faudrait demander à 23 élèves pour qu'il y ait 50% de chance qu'il y en ait deux avec la même date de naissance.

Lorsque deux événements d'une expérience n'ont aucun résultat commun, on dit qu'ils sont mutuellement exclusifs.

Ex. : Classifie les événements de chaque expérience dans deux catégories : mutuellement exclusifs ou non mutuellement exclusifs.

a) L'expérience consiste à jeter un dé. Premier événement : obtenir un nombre pair. Deuxième événement : obtenir un nombre premier.
   1[er] : 2, 4, 6 – 2[e] : 2, 3, 5, donc le 2 se répète, non mutuellement exclusifs.
b) L'expérience consiste à jouer un match de hockey. Premier événement : ton équipe marque un but. Deuxième événement : ton équipe gagne un match.
   Il faut marquer des buts pour gagner donc, non mutuellement exclusifs.
c) L'expérience consiste à choisir un cadeau. Premier événement : le cadeau est quelque chose à manger. Deuxième événement : le cadeau est un disque compact.
   On ne mange pas un disque compact donc, mutuellement exclusifs.
d) L'expérience consiste à couper un jeu de cartes. Premier événement : la carte coupée est une carte de pique. Deuxième événement : la carte coupée est une figure.
   On peut avoir des figures de pique, donc, non mutuellement exclusifs.

Lorsque deux événements sont mutuellement exclusifs, la probabilité que l'un ou l'autre se produise est égale à la somme des probabilités que chacun des deux se produise.

Ex : P(Choisir une voyelle ou un consonne) = P(choisir une voyelle) + P(choisir une consonne) = $\frac{6}{26}+\frac{20}{26}=1$

Ce n'est pas le cas pour deux événements non mutuellement exclusifs.

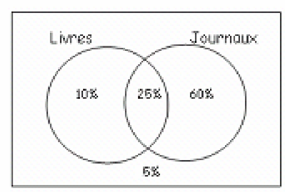
Ex : Voici quelques-uns des résultats d'un sondage sur les habitudes de lecture :

85% ont lu au moins un journal la semaine dernière
35% ont lu au moins un livre la semaine dernière
25% ont lu les deux

Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la même population

a) lise des livres mais pas les journaux?

P(livres seulement) = 0,1




b) Lise des livres ou des journaux?

P(livres ou journaux) = P(livres seulement) + P(journaux seulement) + P(lise les deux)
P(livres ou journaux) = 0,1 + 0,6 + 0,25 = 0,95

Ex 8.2 p. 380 # 1 à 20

9.1 La distribution binomial

- Probabilité d'un événement
  - Distribution binomiale

La distribution binomiale est une expression qui démontre la tendance ou les régularités des probabilités pour les résultats d'essais indépendants et identiques qui se répètent. Si p est la probabilité de réussite et q est la probabilité d'échec (q = 1 – p), alors la probabilité de x réussites en n essais est $P(x\ réussites) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$.

Ex : 1 Le taux de réussite de Vince Carter pour les lancers francs est de 85%. Dans un match où Carter effectue 15 lancers, quelle est la probabilité

a) qu'il en réussisse exactement 13?

$$\begin{aligned} n &= 15 (nombre\ d'essais) \\ x &= 13 (nombre\ de\ réussites) \\ p &= 0{,}85 (probabilité\ de\ réussite\ à\ chaque\ essai) \\ q &= 0{,}15 (probabilité\ d'échec\ à\ chaque\ essai) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(13\ réussites) &= {}_{15}C_{13}(0{,}85)^{13}(0{,}15)^{15-13} \\ &= \frac{15!}{(15-13)!13!}(0{,}120905)(0{,}0225) \\ &= 0{,}285639 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il en réussisse 13 est de 29%.

b) Qu'il en réussisse au moins 13? Il peut donc en réussir 13, 14 ou 15

$$\begin{aligned} n &= 15 \\ x &= 13{,}14{,}15 \\ p &= 0{,}85 \\ q &= 0{,}15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(13{,}14{,}15) &= {}_{15}C_{13}(0{,}85)^{13}(0{,}15)^{15-13} + {}_{15}C_{14}(0{,}85)^{14}(0{,}15)^{15-14} + {}_{15}C_{15}(0{,}85)^{15}(0{,}15)^{15-15} \\ &= 0{,}285639 + 0{,}231232 + 0{,}087354 \\ &= 0{,}604225 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il en réussisse au moins 13 est de 60%.

c) Qu'il en réussisse au moins 1?

$$\begin{aligned} n &= 15 \\ x &= 1{,}2{,}3\ldots15 \\ p &= 0{,}85 \\ q &= 0{,}15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1{,}2{,}3\ldots13{,}14{,}15) &= 1 - {}_{15}C_0(0{,}85)^0(0{,}15)^{15-0} \\ &= 1 - 0{,}000000000000437894 \\ &= 1 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il en réussisse au moins 1 est près de 100%.

Ex : 2 Un fabricant de génératrices à essence estime que 0,1% de ses génératrices sont défectueuses. Si un client commande 25 génératrices, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles soient défectueuses?

$n = 25$
$x = 2,3,4,5...25$
$p = 0,001$
$q = 0,999$

$$\begin{aligned} P(2,3...25) &= 1 - P(0) - P(1) \\ &= 1 - {}_{25}C_0(0,001)^0(0,999)^{25-0} - {}_{25}C_1(0,001)^1(0,999)^{25-1} \\ &= 1 - 0,975298 - 0,024407 \\ &= 0,000295 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 2 génératrices soient défectueuses dans une commande de 25 est très faible, soit d'environ 0,03%.

Ex : 3 Trouve la distribution binomiale pour le nombre de côtés face obtenus lorsqu'on lance une pièce de monnaie quatre fois.

$n = 4$
$x = 0,1,2,3,4$
$p = 0,5(face)$
$q = 0,5(pile)$

$$P(0) = {}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$$

$$P(1) = {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{4}$$

$$P(2) = {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$$

$$P(4) = {}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$$

Ex 9.1 p. 407 # 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18

Révision p. 396 # 1, 2, 3, 4, 5, 6

Révision p. 440 # 1, 3, 5, 6