

Module 2 (8 cours)

LE NOMBRE 2 – LES OPÉRATIONS

Les limites

Chapitre 2 – Calcul différentiel

3 Résultat d'apprentissage général

Effectuer les opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.

3.5 calculer la limite d'une fonction en un point et établir si une fonction est continue

- Notion de la limite d'une fonction

Il arrive parfois que certaines fonctions ne sont pas définies pour certaines valeurs de x . Pour pouvoir tracer le graphique de celle-ci, nous avons besoin de savoir les valeurs de la fonction pour les voisins de gauche et les voisins de droite à un certain point donné.

Ex : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$, où $x \neq 3$ car on ne peut pas avoir de 0 au dénominateur, on calcul la tendance des points très près de 3 à gauche et très près de 3 à droite, sans être 3.

x :	2,9	2,99	2,999	2,9999	c'est-à-dire 3^-	Limite à gauche
x :	3,1	3,01	3,001	3,0001	c'est-à-dire 3^+	Limite à droite

On veut donc trouver les valeurs de y pour lesquels le x se rapproche de 3 sans jamais réellement prendre la valeur de 3, car la fonction n'existe pas à cet endroit.

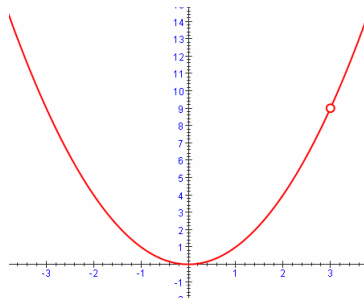
x :	2,9	2,99	2,999	2,9999	c'est-à-dire 3^-	Limite à gauche
$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$	8,41	8,9401	8,994001	8,99940001	Se rapproche de 9	9

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9$$

x :	3,1	3,01	3,001	3,0001	c'est-à-dire 3^+	Limite à droite
$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001	Se rapproche de 9	9

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9$$

Donc, si la limite à gauche est égale à la limite à droite donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$



Ex : $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x + 1}$

a) Trouvons le domaine : on ne peut pas avoir de 0 au dénominateur, donc :

$$D =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, \infty[$$

b) Calculons la tendance des points très près de $-\frac{1}{2}$ à gauche et très près de $-\frac{1}{2}$ à droite, sans être $-\frac{1}{2}$.

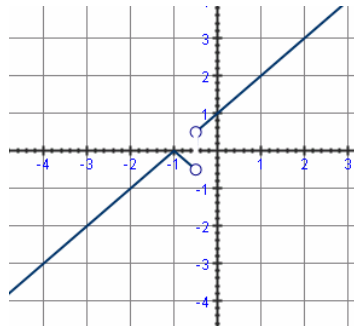
x :	-0,6	-0,51	-0,501	-0,5001	$\rightarrow 0,5^-$	Limite à gauche
$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x + 1}$	-0,4	-0,49	-0,499	-0,4999	$\rightarrow -0,5$	-0,5

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = -0,5$$

x :	-0,4	-0,49	-0,499	-0,4999	$\rightarrow 0,5^+$	Limite à droite
$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x + 1}$	0,6	0,51	0,501	0,5001	$\rightarrow 0,5$	0,5

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = 0,5$$

Puisque, $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x)$ n'existe pas.



- Propriétés des limites

Théorème 1 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Théorème 2 - a) Limite d'une fonction constante; $\lim_{x \rightarrow a} k = k; k \in \mathbb{R}$

b) limite de a fonction identité; $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Théorème 3 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

- Limite d'une somme de fonctions;
- Limite du produit d'une fonction par une constante;

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL$$

- Limite d'une différence de fonctions;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

d) Limite d'un produit de fonctions;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = LM$$

e) Limite d'un quotient de fonctions;

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ si } M \neq 0$$

Théorème 4 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$ où L_i appartient à \mathbb{R} .

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \right) \dots \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = L_1 L_2 \dots L_n$$

Théorème 5 - a) $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$, où n appartient à \mathbb{N} .

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, où L appartient à \mathbb{R} , alors;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n, \text{ où } n \text{ appartient à } \mathbb{N}.$$

Théorème 6 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, où L appartient à \mathbb{R} , et si $[f(x)]^r$ est définie pour x voisin de a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^r = L^r, \text{ où } r \text{ appartient à } \mathbb{N}.$$

Théorème 7 - Théorème « sandwich » - Soit trois fonctions telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, lorsque le domaine est $]c, d[$, et que $x \neq a$, où $c < a < d$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, où L appartient à \mathbb{R} , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Ex : Pour trouver les limites, il suffit de remplacer la valeur dans la variable, si possible, et résoudre.

Si on demande les théorèmes, vérifier lesquels vous utiliser pour différents problèmes.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ théorème 1b

b) $\lim_{x \rightarrow -2} 5(x - 4) = \left(\lim_{x \rightarrow -2} 5 \right) \left(\lim_{x \rightarrow -2} x - 4 \right)$ théorème 3d

$$5 \left(\lim_{x \rightarrow -2} x - \lim_{x \rightarrow -2} 4 \right) = 5(-2 - 4) = -30 \text{ théorèmes 2a, 3a}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, parce qu'on ne peut pas placer de 0 au dénominateur, on peut utiliser le théorème 7.

Nous savons que la valeur du sinus varie entre -1 et 1.

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \text{ pour } x \neq 0$$

$$\text{Ainsi, } -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2, \text{ pour } x \neq 0$$

$$\text{Parce que } \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

- Formes indéterminées ($\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$)

2.2 Indétermination de la forme $\frac{0}{0}$

D'après les théorèmes sur les limites, il semble qu'on n'a qu'à remplacer x par a dans la fonction donnée, mais ceci ne fonctionne pas toujours. Par contre, il existe plusieurs cas où cette méthode n'est pas appropriée, par exemple, lorsque dans un quotient, la limite du numérateur est 0, et la limite du dénominateur est 0, ce qui nous donne une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

Évaluons de façon algébrique :

Ex : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5x}{x - 1} = \frac{0}{0}$, indétermination de la forme $\frac{0}{0}$, si on essaie la mise en facteur.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5x = 5 \text{ (en simplifiant, car } (x-1) \neq 0 \text{)}$$

Ex : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 - x^2}{h} = \frac{0}{0}$, indétermination de la forme $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Vérifier aussi exemples 4, 5 et 6 page 54, 55.

Ex : 2,2 page 56 # 1 à 4

- Continuité d'une fonction

2.3 Continuité

Ici, nous voulons vérifier la continuité des fonctions par parties.

Une fonction est dite continue lorsque la courbe qui la représente n'as pas de coupure, c'est-à-dire qu'on peut la tracer sans lever le crayon.

Une fonction $f(x)$ est continue en $x = a$ si et seulement si :

- 1) $f(a)$ est définie, pour le domaine de la fonction donnée.
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ou entre autre mot, si la réponse en 1) est égale à la réponse en 2)

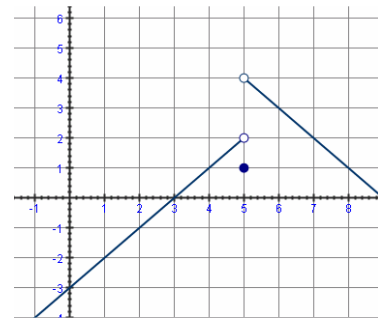
Ex : soit $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x < 5 \\ 1 & \text{si } x = 5 \\ 9-x & \text{si } x > 5 \end{cases}$

Juste en regardant le graphique, on sait que la fonction n'est pas

Continue au point $x = 5$. Vérifions les 3 conditions.

- 1) $f(5) = 1$
- 2) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} x - 3 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} 9 - x = 4 \end{array} \right\} \text{donc, } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \text{ n'est pas définie}$

La fonction n'est pas continue au point $x = 5$, conditions 2 et 3 non satisfaites.



Ex : Soit $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ 7 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$, quelles sont les valeurs de x où le graphique pourraient être discontinu?

Aux points, $x = 1$ et $x = 2$.

Donc, on doit vérifier les trois conditions.

a) En $x = 1$.

- 1) $f(1) = 3$
- 2) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 2 \end{array} \right\} \text{donc, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- 3) $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 $3 \neq 2$

La fonction n'est pas continue au point $x = 1$, condition 3.

b) En $x = 2$.

- 1) $f(2) = 5$
- 2) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 7 - x = 5 \end{array} \right\} \text{donc, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$
- 3) $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 $5 = 5$

La fonction est continue au point $x = 2$.

Continuité d'une fonction sur un intervalle

La continuité d'une fonction sur un intervalle se définit de la façon suivante.

Une fonction f est :

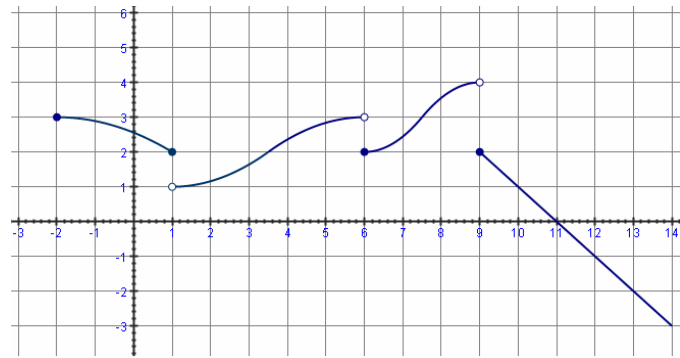
1) continue sur $]a, b[$, si elle est continue pour toutes les valeurs de x dans $]a, b[$.

2) continue sur $[a, b]$ si $\begin{cases} 1) f \text{ est continue sur }]a, b[; \\ 2) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \\ 3) \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b). \end{cases}$

3) continue sur $]a, b]$ si $\begin{cases} 1) f \text{ est continue sur }]a, b[\\ 2) \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

4) continue sur $[a, b[$ si $\begin{cases} 1) f \text{ est continue sur }]a, b[\\ 2) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \end{cases}$

Ex : Utilisons le graphique ci-contre pour déterminer si la fonction est continue sur les intervalles donnés.



a) sur $]1, 6[$

b) sur $[-2, 1]$

c) sur $[6, 9]$

d) sur $]9, +\infty[$

e) sur $[-2, 2]$

Ex . 2.3 : p.67 # 7, 8

Exercices récapitulatifs p. 71 # 1a, 2bde, 3, 4, 5acegi, 6acegi, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13aceg, 14, 15a, 16b, 17bc