Mathématiques 30411

Module 4 (25 cours)

L'ALGÈBRE - Fonctions trigonométriques

2 Résultat d'apprentissage général

Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

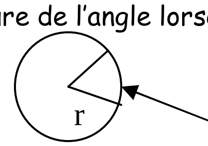
Résultats d'apprentissage spécifiques

L'élève doit pouvoir :

2.5 Modéliser des situations à l'aide de fonctions trigonométriques et les utiliser afin de résoudre des problèmes

- Mesures angulaires
  - ◊ Degrés et radians

4.1 Jusqu'à maintenant, nous avons utilisé des degrés pour mesurer des angles. Une autre unité pour mesurer les angles est le radian. Un radian est la mesure de l'angle lorsque le rayon est de la même longueur que la longueur de l'arc du secteur.



Si cette longueur d'arc est la même longueur que le rayon du cercle, alors l'angle du secteur mesure 1 rad.

Étant donné que la circonférence de tout cercle est de $2\pi r$, où r est le rayon.

À retenir

$$\boxed{2\pi \ rad = 360° \quad donc \quad \pi \ rad = 180°}$$

Pour convertir de radians en degrés ou de degrés en radians, nous allons nous servir de $\pi \ rad = 180°$.

Ex : Convertis la mesure de l'angle de 45°, en radians. Exprime ta réponse en fonction de π.

$$\pi \ rad = 180°$$
$$x \ rad = 45°$$

On cherche la valeur de x, donc on fait la multiplication croisée.

$180° x = 45° \pi$ et on simplifie pour x.

$$x = \tfrac{45}{180}\pi \ rad = \tfrac{\pi}{4} \ rad$$

Si on veut le convertir en radians sans le π, on le remplace par 3, 14159… donc $x = \tfrac{\pi}{4} \ rad = 0{,}785398163\ldots$

Ex : Convertis la mesure de l'angle de $-\dfrac{3\pi}{4}$ radians, en degrés.

$$\pi \ rad = 180°$$
$$\tfrac{-3\pi}{4} \ rad = x°$$

On cherche la valeur de x, donc on fait la multiplication croisée.

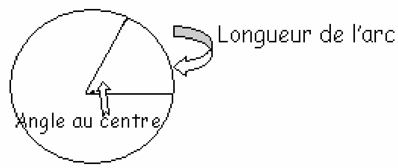
$$180° \times \tfrac{-3\pi}{4} = \pi \ x$$

$$135° \pi = \pi \ x \longrightarrow x = 135°$$

Degrés	30		120	
Radians		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{-11\pi}{6}$

Lorsque tu travailles avec des secteurs d'un cercle, on utilise la méthode de proportion pour trouver la longueur de l'arc ou la mesure de l'angle au centre en radians.

$$\frac{longueur\ de\ l'arc}{circonférence} = \frac{angle\ au\ centre}{1\ révolution}$$



$$\frac{A}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \longrightarrow \theta = \frac{2\pi A}{2\pi r} = \frac{A}{r}$$

Ex : Trouve la mesure de l'angle au centre, si la longueur de l'arc est 6 et la longueur du rayon est 4.

$$\theta = \frac{A}{r}$$

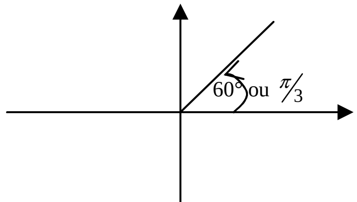
$$\theta = \frac{6}{4} = 1{,}5 rad$$

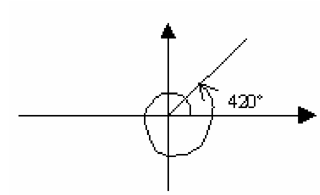
***Ex 4.1 : p.189   # 1, 2, 3, 5, 7, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27

Un angle est en position standard si son sommet est à l'origine et que sa demi-droite initiale se trouve sur l'axe des x positifs. L'autre demi-droite qui forme l'angle est appelée côté terminal.

Si l'angle de rotation est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, l'angle est positif. Si l'angle de rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre, l'angle est négatif.

Les angles qui partagent le même côté terminal sont appelés des angles co-terminaux et le plus petit des angles co-terminaux positifs est appelé l'angle principal. Si deux angles ont une différence de 360° ou de 2π *radians*, ou n'importe quel multiple de ces grandeurs, sont des angle co-terminaux.





Ex : Détermine un angle co-terminal positif et un angle co-terminal négatif pour chaque angle.

a) 210°

Un angle co-terminal positif

210° + 360° = 570°

Un angle co-terminal négatif

210° - 360° = -150°

b) $2\pi/3$

Un angle co-terminal positif

$2\pi/3 + 2\pi = 8\pi/3$

Un angle co-terminal négatif

$2\pi/3 - 2\pi = -4\pi/3$

◊ Vitesse angulaire

La vitesse angulaire est la vitesse à laquelle l'angle au centre, en radians, change. On se sert de la relation

$$vitesse = \frac{distance}{temps}.$$

Ex : Un tour de potier dont le rayon mesure 16cm effectue 30 révolutions en 10s. Détermine la vitesse angulaire moyenne du tour de potier en radians par seconde. Arrondis ta réponse au centième.

$$1 \text{ révolution} = 2\pi$$

$$30 \text{ révolutions} = 60\pi$$

$$\text{vitesse angulaire moyenne} = \frac{60\pi}{10s} = 18{,}85\ rad/s$$

La vitesse angulaire moyenne est de 18,85 rad/s.

***Ex 4.1 : p.190 # 29, 31, 33, 35, 37, 40, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 55, 59, 65, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 80

- Fonctions trigonométriques
  - ◊ Cercle trigonométrique

4.2 Si θ est un angle en position standard et que P(x, y) est une coordonnée située sur le côté terminal de $\angle\theta$, à une distance r de l'origine. Alors, r = $\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$cosec\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad cotan\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

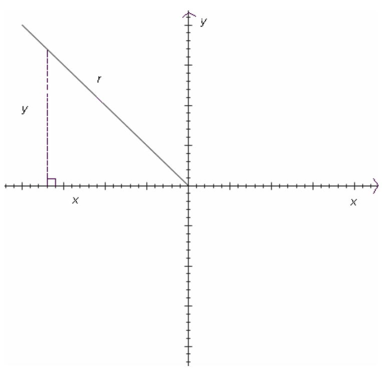
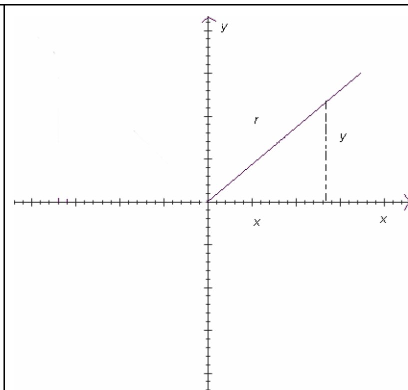
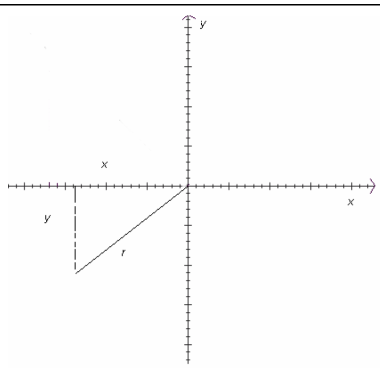
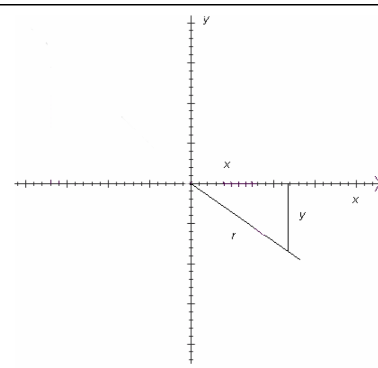
Ex : Le point A(-5, -12) est situé sur le côté terminal de θ. Trouve les six rapports trigonométriques.

r = $\sqrt{x^2+y^2}$ = $\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$ = $\sqrt{25+144}$ = $\sqrt{169} = 13$

$$\sin\theta = \frac{-12}{13}, \quad \cos\theta = \frac{-5}{13}, \quad \tan\theta = \frac{12}{5},$$

$$cosec\,\theta = \frac{13}{-12}, \quad \sec\theta = \frac{13}{-5}, \quad cotan\,\theta = \frac{5}{12}$$

Les rapports trigonométriques de tout angle situé dans le quadrant 1 sont toujours positifs. Mais, dans les autres quadrants, il faut faire attention aux signes de x ou de y.

	Quadrant II $90° < \theta < 180°$ $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{+}{+}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-}{+}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{+}{-}$		Quadrant I $0° < \theta < 90°$ $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{+}{+}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{+}{+}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{+}{+}$
	Quadrant III $180° < \theta < 270°$ $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-}{+}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-}{+}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-}{-} = +$		Quadrant IV $270° < \theta < 360°$ $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-}{+}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{+}{+}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-}{+}$

Tu peux retenir le sigle TSTAC pour mémoriser les rapports qui sont positifs.

S Sin	T Tous
Ta Tan	C cos

Mathématiques 30411

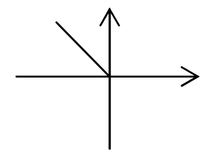
Valeur des fonctions trigonométriques pour les angles particuliers.

θ	$30°\ ou\ \frac{\pi}{6}$	$45°\ ou\ \frac{\pi}{4}$	$60°\ ou\ \frac{\pi}{3}$
Sin θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
Tan θ	$\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

Ex : Trouve les rapports trigonométriques primaires exacts (signifie en fraction) d'un angle de 120°.

On trouve dans quel quadrant l'angle est situé : dans le quadrant II.

La différence entre l'angle et l'axe horizontale : 180° - 120° = 60°. Donc



Sin 120°	*Cos* 120°	Tan 120°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$

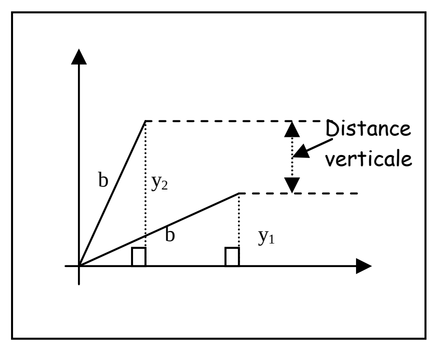
Ex : Le bras d'une grue qui soulève des charges très lourdes peut atteindre un angle d'inclinaison minimal de 30° et maximal de 60°. Utilise des valeurs exactes pour trouver une expression, sous forme simplifiée, de la variation du déplacement vertical de l'extrémité du bras, en fonction de la longueur du bras, b.

Le déplacement vertical serait $y_2 - y_1$.

$$\sin 30° = \frac{y_1}{b} \quad \text{et} \quad \sin 60° = \frac{y_2}{b};$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y_1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y_2}{b}$$

$$y_1 = \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$



Le déplacement vertical = $y_2 - y_1 = \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

***Ex 4.2 : p.199 # 1, 3, 5, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 51