Mathématiques 30411

Module 2 (partie 1)

L'algèbre

3. Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

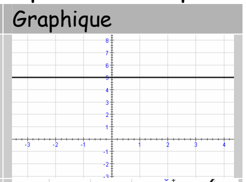
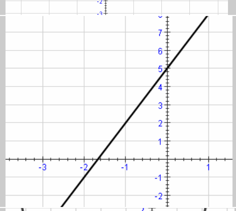
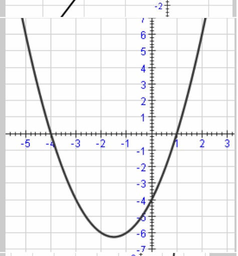
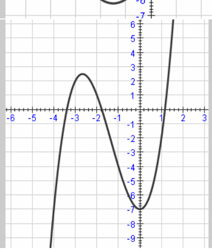
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

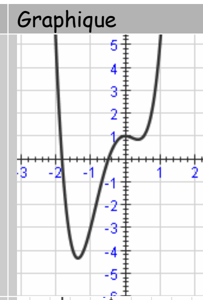
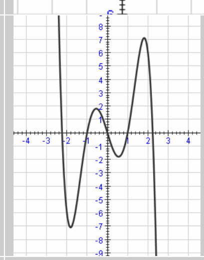
3.2 Modéliser des situations à l'aide de fonctions à variables réelles afin de résoudre des problèmes

- Fonctions valeur absolue, racine carrée et rationnelle
  - ◊ Représentation graphique à partir de la règle de la fonction.
  - ◊ Caractéristiques de la fonction
    - Domaine et image
    - Extremum (extrema) (s'il y a lieu)
    - Axe de symétrie (s'il y a lieu)
    - Asymptotes (s'il y a lieu)
    - Racine(s) et ordonnée à l'origine
    - Signe
    - Variation (croissance/décroissance)
  - ◊ Résolution d'équations et d'inéquations.

Les fonctions et les inéquations polynomiales

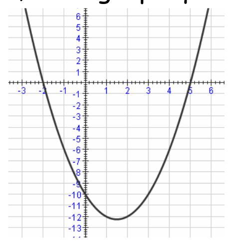
Une fonctions polynomiale est une équation de la forme $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_{0,}$ où les coefficients représentent des nombres réels, et où les exposants sont des nombres entiers non négatifs. Le degré de l'équation est la valeur du plus haut exposant.

Fonction	Exemple	Degré	Graphique
Constante	$f(x) = 5$	0	
Linéaire	$f(x) = 3x + 5$	1	
Quadratique	$f(x) = x^2 + 3x - 4$	2	
Cubique	$f(x) = x^3 + 4x^2 - 7$	3	

Fonction	Exemple	Degré	Graphique
Quartique	$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1$	4	
Quintique	$f(x) = -x^5 + 6x^3 - 5x$	5	
Générale	$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$	n	

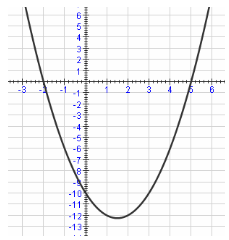
On peut trouver les zéros réels d'une fonction polynomiale, ce sont les abscisses à l'origine de son graphique, ou en autres mots, les valeurs de x, lorsque y = 0, où le graphique coupe l'axe des x.

Exemple : $y = x^2 - 3x - 10$
Les zéros seraient x = -2 et x = 5.



On peut aussi décrire le comportement d'une fonction dans un certain intervalle. Comme donner l'intervalle où la fonction est positive, c'est à dire, l'intervalle où y > 0.

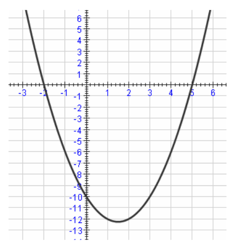
Exemple : $y = x^2 - 3x - 10$
Y > 0 dans l'intervalle $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]5,\infty\right[$



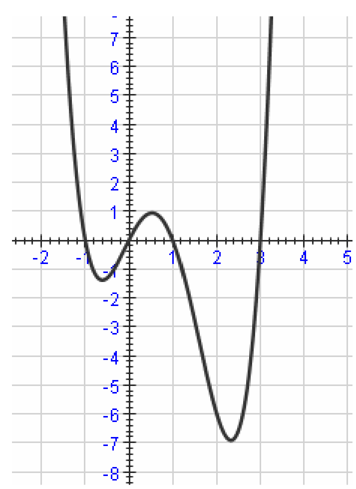
Le domaine d'une fonction est l'ensemble des abscisses pour lesquelles une fonction est définie. Il faut se rappeler des restrictions qui peuvent exister, soient pas de zéro dans un dénominateur, pas de négatif dans une racine qui a un indice paire.

L'image d'une fonction est l'ensemble de toutes les valeurs de f(x) d'après le domaine.

Exemple : $y = x^2 - 3x - 10$
D = $\left]-\infty,\infty\right[$ et I = $\left[-12{,}25,\infty\right[$



Exemple : Interprétons un diagramme
À partir du diagramme de la fonction polynomiale $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$, détermine



a) le domaine et l'image de f(x)

D = $\left]-\infty,\infty\right[$ et I = $\left[-7,\infty\right[$

b) les zéros réels de f(x)

x = -1, 0, 1 et 3

c) l'ordonnée à l'origine

0

d) les intervalles où f(x) > 0

$\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,1\right[\cup\left]3,\infty\right[$

e) les coordonnées approximatives de tous les maximums relatifs ou minimum relatifs

maximum relatif (0,5, 1)
minimums relatifs (-0,6, -1,4), (2,4, -7)

f) toute symétrie

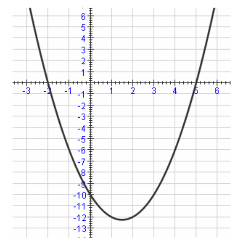
Aucune symétrie

Représentant graphiquement une fonction.

Constante; $f(x) = c$
On sait qu'une fonction constante est une ligne droite horizontale au point $y = c$.

Linéaire; $f(x) = mx + b$
On sait comment tracer une fonction linéaire, soit par l'ordonnée à l'origine et la pente, point pente, ordonnée et abscisse à l'origine ou tout simplement deux points.

Quadratique; $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(x) = a(x - p)^2 + q$
On a déjà appris comment tracer une parabole par son sommet (p, q) et les zéros de la fonction (ce qu'on appelle aussi les valeurs critiques). On peut aussi faire la *dérivée première de la fonction* pour trouver le sommet. Ceci est la plus simple des dérivées, vous verrai les autres plus tard. Il suffit de prendre l'exposant de la variable et de le multiplier avec le coefficient, ensuite diminuer l'exposant de 1; il faut le faire pour chaque terme. On trouve ensuite le zéro de la dérivée et c'est le x de la coordonnée du sommet, on remplace dans f(x) pour trouver le y.



Exemple : $f(x) = x^2 - 3x - 10$
$D = \left]-\infty, \infty\right[$ et $I = \left[-12{,}25, \infty\right[$
La dérivée première est $f'(x) = (2 \times 1)x^{2-1} - (1 \times 3)x^{1-1} - (0 \times 10)x^{0-1}$
$2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x = {}^3/_2$
$f({}^3/_2) = ({}^3/_2)^2 - 3({}^3/_2) - 10$
$f({}^3/_2) = ({}^3/_2)^2 - 3({}^3/_2) - 10 = -12{,}25$
donc le sommet serait (1,5, -12,25)
les zéros de la fonction sont $0 = (x - 5)(x + 2)$
$x = 5$ ou $x = -2$

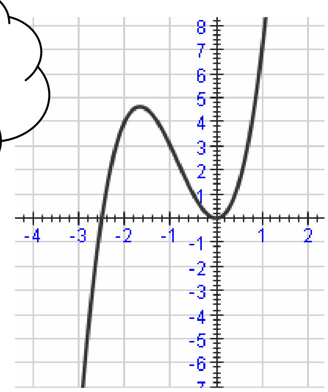
Cubique; $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
On peut décomposer en facteurs et trouver les zéros de la fonction ou les nombres critiques, et faire le tableau des valeurs. On peut aussi trouver les sommets avec la dérivée première.

Exemple : $f(x) = 2x^3 + 5x^2$
Il faut trouver les zéros. $0 = x^2(2x + 5)$
Donc $x = 0$, $x = 0$, $x = {}^{-5}/_2$

S'il y une racine double, comme le 0 ici, c'est que le sommet est sur l'axe des x.

$F'(x) = 6x^2 + 10x = 0$
$2x(3x + 5) = 0$
$x = 0$ $x = {}^{-5}/_3$
$f(0) = 0$ et $f({}^{-5}/_3) = 2({}^{-5}/_3)^3 + 5({}^{-5}/_3)^2 = 4{,}6$
sommets (0,0) et $({}^{-5}/_3, 4{,}6)$

x	y
-3	-9
-2	4
-1	3
0	0
1	7

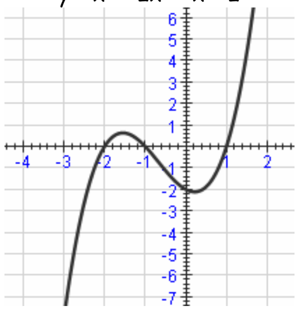


**** 5.4 Les fonctions et les inéquations polynomiales p. 282 #1 à 18, 21, 22*

Mathématiques 30411

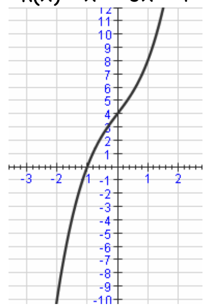
**** 5.4 Les fonctions et les inéquations polynomiales p. 282 #23 à 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39 sur feuilles*

23. $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$



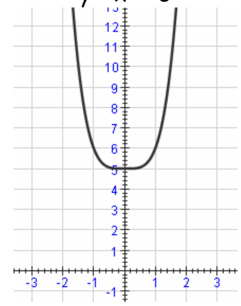
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

24. $k(x) = x^3 + 3x + 4$



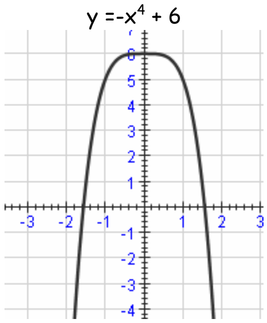
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

25. $y = x^4 + 5$



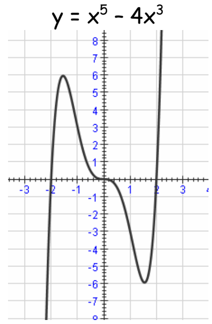
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

26. $y = -x^4 + 6$



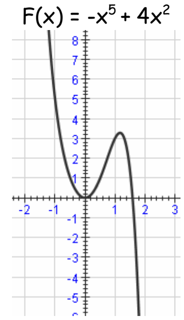
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

27. $y = x^5 - 4x^3$



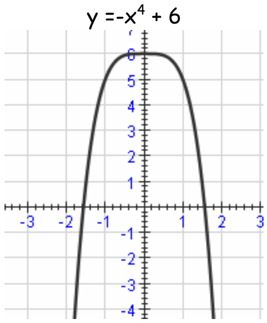
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

28. $F(x) = -x^5 + 4x^2$



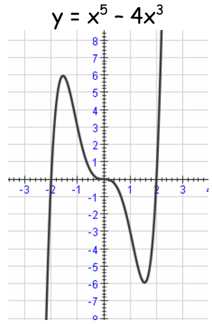
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

26. $y = -x^4 + 6$



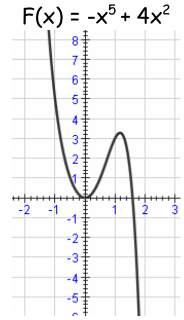
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

27. $y = x^5 - 4x^3$



a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

28. $F(x) = -x^5 + 4x^2$

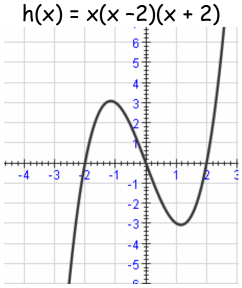


a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

Mathématiques 30411

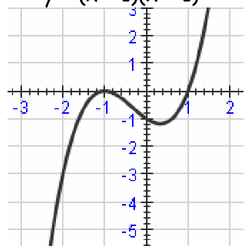
**** 5.4 Les fonctions et les inéquations polynomiales p. 282 #23 à 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39 sur feuilles*

29. $h(x) = x(x - 2)(x + 2)$



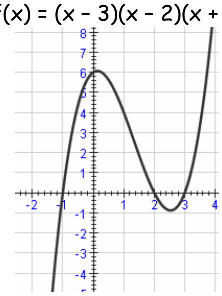
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

30. $y = (x - 1)(x + 1)^2$



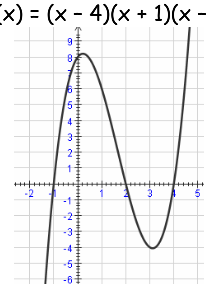
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

31. $f(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$



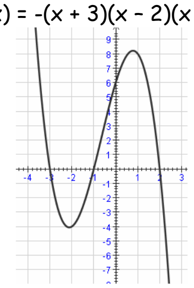
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Maximums relatifs
Minimums relatifs
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

33. $f(x) = (x - 4)(x + 1)(x - 2)$



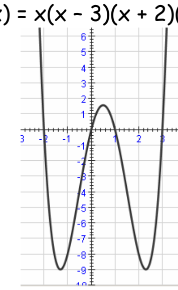
a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Intervalles $f(x) > 0$
$f(x) < 0$
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

34. $f(x) = -(x + 3)(x - 2)(x + 1)$



a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Intervalles $f(x) > 0$
$f(x) < 0$
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

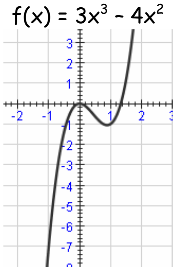
35. $f(x) = x(x - 3)(x + 2)(x - 1)$



a) Domaine
Image
b) Tous les zéros réels, une place décimale
c) L'ordonnée à l'origine
d) Intervalles $f(x) > 0$
$f(x) < 0$
e) Symétrie
f) Comportement des extrémités

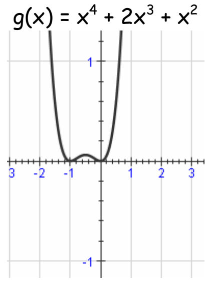
Vérifie si chaque fonction a les racines indiquées.

37. $f(x) = 3x^3 - 4x^2$



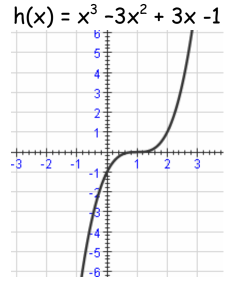
Deux racines égales à zéro

38. $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$



Deux racines égales à 0
deux racines égales à -1

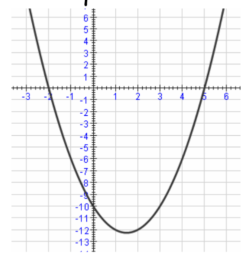
39. $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$



Trois racines égales à 1

Les inéquations

Les zéros réels des fonctions polynomiales sont les valeurs critiques de l'inéquation, qui servent à délimiter des intervalles d'essai de l'inéquation, c'est-à-dire des intervalles où on vérifie des points qui rendent l'inéquation vraie.



Exemple : $x^2 - 3x < 10$

$x^2 - 3x - 10 < 0$

$(x - 5)(x + 2) < 0$

$x = -2$ et $x = 5$ sont des valeurs critiques, donc il faut vérifier chaque intervalle.

	$x < -2$		$-2 < x < 5$		$x > 5$	$x = -2$	$x = 5$
	$x^2 - 3x < 10$		$x^2 - 3x < 10$		$x^2 - 3x < 10$	$(-2)^2 - 3(-2) < 10$	$(5)^2 - 3(5) < 10$
$x = -3$	$(-3)^2 - 3(-3) < 10$	$x = 0$	$(0)^2 - 3(0) < 10$	$x = 7$	$(7)^2 - 3(7) < 10$	$4 + 6 < 10$	$25 - 15 < 10$
	$9 + 9 < 10$		$0 - 0 < 10$		$49 - 21 < 10$	$10 < 10$	$10 < 10$
	$18 < 10$		$0 < 10$		$28 < 10$	non	non
	non		oui		non		

donc la seule intervalle qui satisfait l'inéquation est $-2 < x < 5$ et on peut le vérifier en traçant le graphique.

Exemple : $x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$

Il faut donc décomposer en facteurs. Les facteurs de 3 sont $\pm 1, \pm 3$

$F(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - (1) - 3 = 0$, donc $x - 1$ est un facteur.

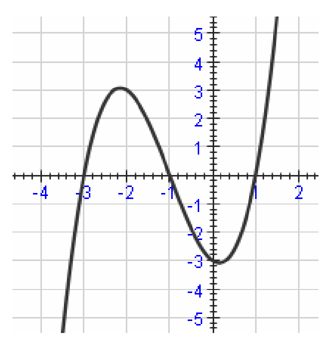
Ce qui veut dire que $(x - 1)$ est un facteur de $x^3 + 3x^2 - x - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4x + 3 \\
x^3 + 3x^2 - x - 3 & x - 1 \\
\underline{x^3 - x^2} & \\
4x^2 - x - 3 & \\
\underline{4x^2 - 4x} & \\
3x - 3 & \\
\underline{3x - 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Les facteurs sont donc de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 + 4x + 3) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$ donc les nombres critiques sont −3, -1, 1

	$x < -3$		$-3 < x < -1$		$-1 < x < 1$		$x > 1$
	$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$		$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$		$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$		$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$
$x = -4$	$(-4)^3 + 3(-4)^2 - (-4) - 3 \geq 0$	$x = -2$	$(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) - 3 \geq 0$	$x = 0$	$(0)^3 + 3(0)^2 - (0) - 3 \geq 0$	$x = 2$	$(2)^3 + 3(2)^2 - (2) - 3 \geq 0$
	$-64 + 48 + 4 - 3 \geq 0$		$-8 + 12 + 2 - 3 \geq 0$		$0 + 0 - 0 - 3 \geq 0$		$8 + 12 - 2 - 3 \geq 0$
	$-15 \geq 0$		$3 \geq 0$		$-3 \geq 0$		$15 \geq 0$
	non		oui		non		oui

$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$
$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$	$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$	$x^3 + 3x^2 - x - 3 \geq 0$
$(-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 \geq 0$	$(-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 \geq 0$	$(1)^3 + 3(1)^2 - (1) - 3 \geq 0$
$-27 + 27 + 3 - 3 \geq 0$	$-1 + 3 + 1 - 3 \geq 0$	$1 + 3 - 1 - 3 \geq 0$
$0 \geq 0$	$0 \geq 0$	$0 \geq 0$
oui	oui	oui

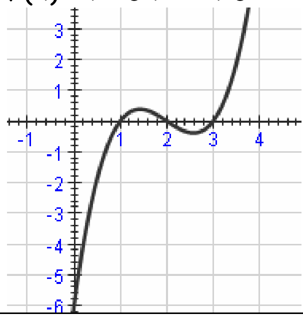
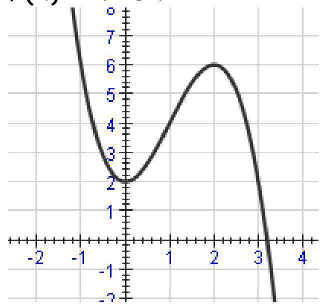
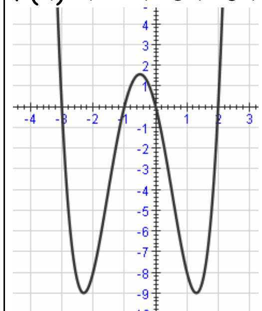
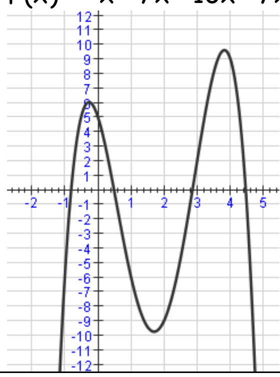
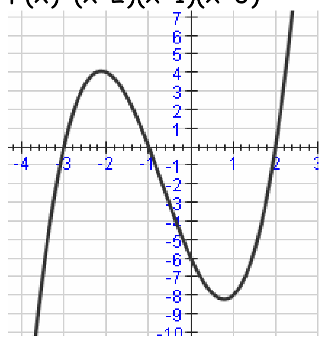
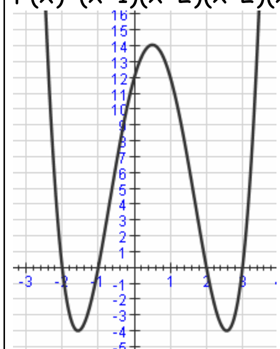
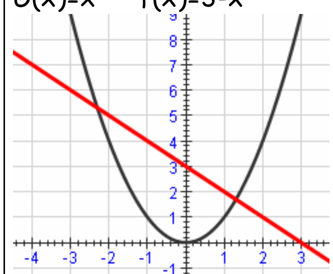
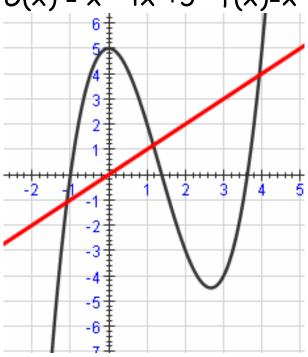
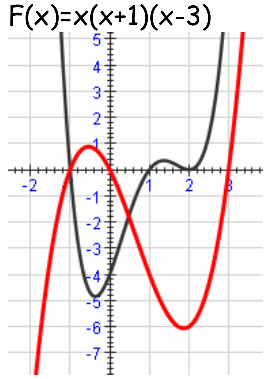
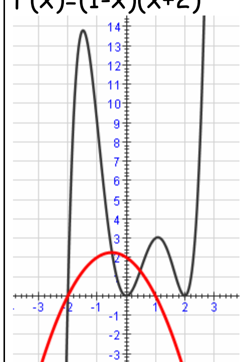


donc la solution est $-3 \leq x \leq -1$ et $x \geq 1$, on peut le vérifier en traçant le graphique.

**** 5.4 Les fonctions et les inéquations polynomiales p. 282 #41 à 56, 58, 60, 63, 64, 66, 69*

Mathématiques 30411

**** 5.4 Les fonctions et les inéquations polynomiales p. 282*

9	$F(x)= x^3 -6x^2+11x-6$ 	10	$F(x)= -x^3+3x^2+2$ 	11	$F(x)=x^4+2x^3-5x^2-6x$ 
12	$F(x) = -x^4+7x^3-10x^2-7x+5$ 	13	$F(x)=(x-2)(x+1)(x+3)$ 	14	$F(x)=(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)$ 
15		16		58a	$G(x)=x^2$ $f(x)=3-x$ 
58b	$G(x) = x^3-4x^2+5$ $f(x)=x$ 	58c	$G(x)=(x+1)(x-1)(x-2)^2$ $F(x)=x(x+1)(x-3)$ 	58d	$G(x)=x^2(x-2)^2(x+2)$ $F(x)=(1-x)(x+2)$ 
63	$L(t) = 10+0,3t+0,4t^2-0,01t^3$	64	$(x+5)(x)(x-2)$	69	$(9-2x)(11-2x)x$