Mathématiques 30321

Module 6

Les formes et l’espace 2 – La géométrie

4. Décrire, comparer et analyser les figures géométriques pour comprendre les structures du monde réel et pour en créer de nouvelles.

RÉSULTATS D’APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

4.1 Utiliser les cas de congruence des triangles pour démontrer des propositions et résoudre des problèmes

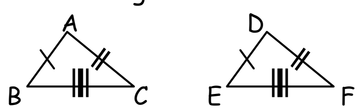
- Propriétés de figures congrues
- Conditions minimales de congruence des triangles

Si deux triangles sont congruents si et seulement si leurs parties homologues sont congruentes.

Voici les théorèmes qui démontrent que deux triangles sont congruents.

◊ CCC

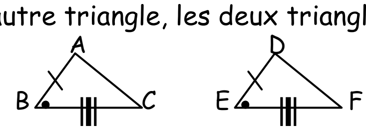
Si les trois côtés d’un triangle sont congruents aux trois côtés homologues d’un autre triangle, les deux triangles sont congruents.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◊ CAC

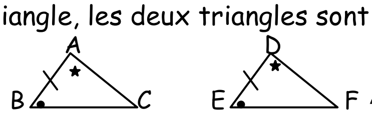
Si deux côtés et l’angle compris entre les deux côtés sont congruents aux deux côtés homologues et à l’angle compris homologue d’un autre triangle, les deux triangles sont congruents.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◊ ACA

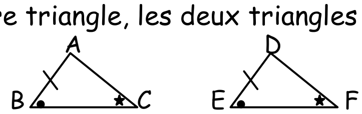
Si deux angles et le côté compris d’un triangle sont congruents aux deux angles homologues et au côté compris homologue d’un autre triangle, les deux triangles sont congruents.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◊ AAC

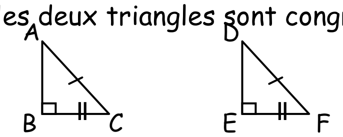
Si des angles et un côté non compris d’un triangle sont congruents aux deux angles homologues et au côté non compris homologue d’un autre triangle, les deux triangles sont congruents.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

◊ HC

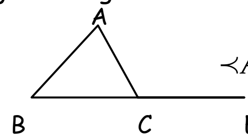
Si l’hypoténuse d’un triangle rectangle et un autre côté sont congruents à l’hypoténuse et au côté homologue d’un autre triangle, les deux triangles sont congruents.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

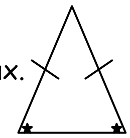
Théorème de l’angle extérieur

L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs et opposés.



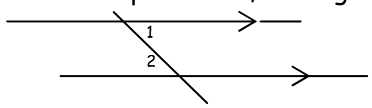
$\angle ACE = \angle A + \angle B$

Théorème du triangle isocèle
Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

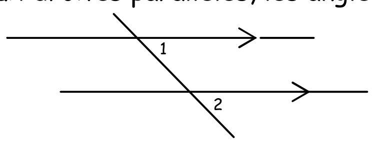


Théorèmes sur les droites parallèles

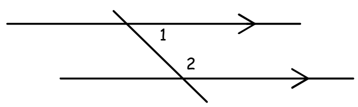
- si une sécante coupe deux droites parallèles, les angles alternes-internes sont égaux.



- si une sécante coupe deux droites parallèles, les angles correspondants sont égaux.

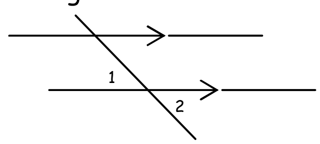


- si une sécante coupe deux droites prallèles, les angles intérieurs du même côté de la sécante sont supplérmentaires(180). $\angle 1 + \angle 2 = 180°$

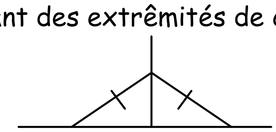


La somme des angles d'un triangle est 180.

Les angles opposés par le sommet sont égaux $\angle 1 = \angle 2$



Théorème de la médiatrice
Tout point de la médiatrice d'un segment de droite est équidistant des extrêmités de ce segment de droite.



****Point de départ p. 382 # ❶ 1 à 16 ❷ 1 à 6*

- Démonstration de propositions

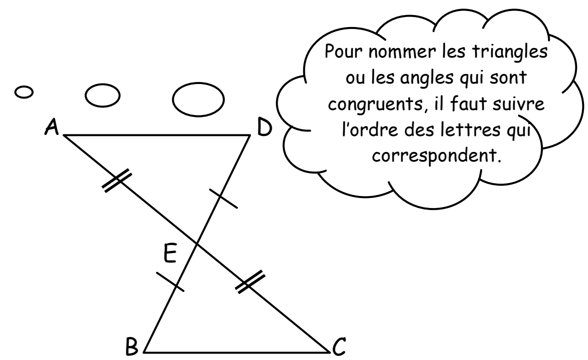
Propriété d'addition	Si a = b, alors a + c = b + c

Propriété de soustraction	Si a = b, alors a – c = b - c
Propriété de multiplication	Si a = b, alors ac = bc
Propriété de division	Si a = b et c $\neq$ 0, alors $^a/_c$ = $^b/_c$
Propriété de substitution	Si a = b, alors a peut remplacer b ou b peut remplacer a
Propriété transitive	Si a = b et b = c, alors a = c
Propriété de symétrie	Si a = b, alors b = a
Propriété de réflexion	a = a
Propriété de distribution	a(b + c) = ab + ac

Un ensemble d'énoncés et de justifications constitue une preuve. Les éléments suivants peuvent servir de justifications dans une preuve :

- les données connues;
- des définitions;
- les propriétés des nombres réels;
- les théorèmes déjà prouvés;
- des postulats ou des axiomes.

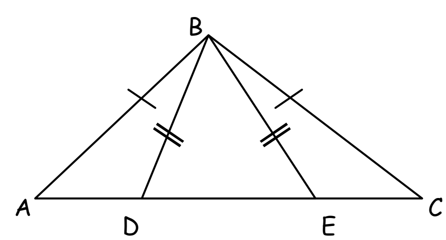
Les théorèmes sont des énoncés déjà prouvés. Les postulats, aussi appelés axiomes, sont des énoncés non prouvés mais admis comme vrais.



Ex : Complétons la preuve
Soit : AE = CE; ED = EB
Prouve que : AD || BC

Énoncés	Justifications
a) AE = CE	Données connues
b) ED = EB	Données connues
c) <AED = <CEB	Théorème des angles opposés
d) Δ AED = Δ CEB	CAC
e) <DAE = <BCE	Triangles congruents
f) AD || BC	Théorème des droites parallèles

Ex : Prouve que <ABD = <CBE
Soit :
Prouve que :

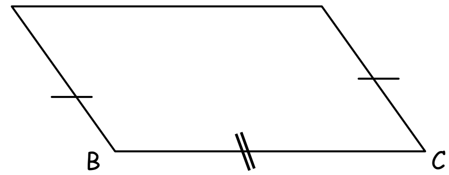


Énoncés	Justifications

Ex : Prouve que AD || BC
Soit :

Prouve que :

Énoncés	Justifications

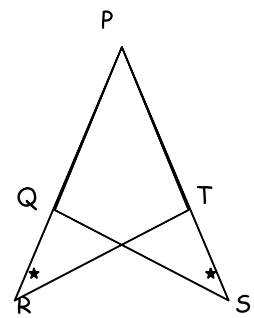


Ex : Si PR = PS, prouve que RT = SQ

Soit :

Prouve que :

Énoncés	Justifications

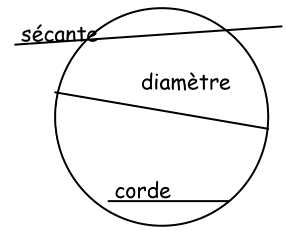


****7.1 Les preuves géométriques p. 389 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 26, 27*

4.2 Utiliser le raisonnement logique déductif pour démonter des propositions géométriques portant sur le cercle

- Détermination de mesures manquantes dans des cercles ou polygones convexes à l'aide des relations métriques

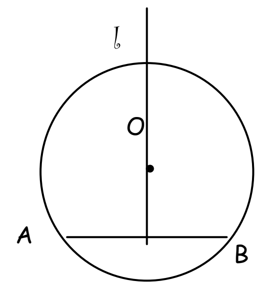
◊ Corde



Une corde est un segment de droite qui relie deux points sur la circonférence d'un cercle.

Le diamètre est une corde qui passe par le centre du cercle.

Une sécante est une droite qui contient une corde.



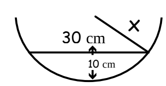
Ex : Prouve que la médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.
Soit : un cercle de centre O; la corde AB; ℓ la médiatrice de AB.
Prouve : O est un point sur ℓ

Énoncés	Justifications
ℓ est la médiatrice de AB	données connues
OA = OB	Rayons d'un cercle
O est un point sur ℓ	Réciproque du théorème de la médiatrice

Théorème de la médiatrice d'une corde

- La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.
- Les médiatrices de deux cordes non parallèles se coupent au centre du cercle.
- La droite qui est perpendiculaire à une corde et qui passe par le centre du cercle coupe cette corde en son milieu.
- Le segment de droite qui relie le centre d'un cercle et le point milieu d'une corde est perpendiculaire à cette corde.

Ex : On se sert d'un pot hémisphérique en guise de jardinière. La largeur à la surface du terreau est de 30 cm. La profondeur maximale du terreau est de 10cm. Détermine le rayon du pot.
Soit le rayon de l'hémisphère x, en utilisant la relation de Pythagore.



$x^2 = (x - 10)^2 + 15^2$
$x^2 = x^2 - 20x + 100 + 225$
$20x = 325$
$x = 16{,}25$ cm
le rayon mesure 16,25 cm.

****7.2 Les propriétés de la corde p. 400 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 28, 29, 30*

◊ Angle

Une corde divise un cercle en deux arcs.

Le plus petit des deux arcs est l’arc mineur, tandis que le plus grand est l’arc majeur.

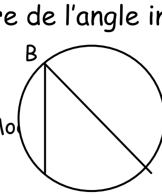
Un angle au centre est un angle dont le sommet est au centre du cercle et dont les demi-droites sont deux rayons du cercle.

On dit que l’angle au centre AOC est sous-tendu par la corde AC et par l’arc AC.

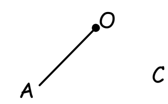
Un angle inscrit est un angle dont le sommet est sur la circonférence du cercle et dont les demi-droites sont deux cordes de ce cercle.

**** Découvertes mathématiques p. 406 # ❶ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ❷ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ❸ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ❹ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ❺ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ❻ 1, 2, 3, 4, 6, 7*

Ex : Prouve que la mesure de l’angle au centre est égale au double de la mesure de l’angle inscrit sous-tendu par le même arc.



Soit : un cercle de centre O; <ABC, un angle inscrit; <AOC, un angle au centre
Prouve que : <AOC = 2<ABC

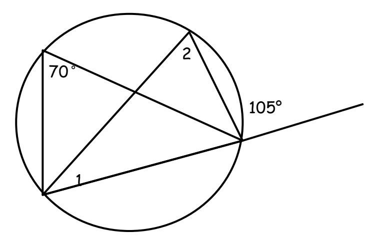


Énoncés	Justifications
OA = OB	Rayons du cercle
<ABC = <BAO	Théorème du triangle isocèle
<AOC = <ABC + <BAO	Théorème des angles extérieurs
<AOC = <ABC + <ABC	Propriété de substitution
<AOC = 2<ABC	Propriété d'addition
$\frac{1}{2}$ <AOC = <ABC	Propriété de division

Théorèmes

- La mesure de l'angle au centre est égale au double de la mesure de l'angle inscrit sous-tendu par le même arc.
- Les angles inscrits sous-tendus par le même arc sont congruents.
- L'angle inscrit sous-tendu par un demi-cercle est un angle droit.

Ex : Détermine les mesures des angles 1 et 2.

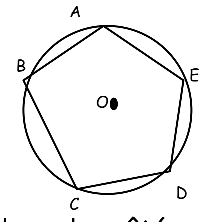


****7.3 Les angles d'un cercle p. 412 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29*

4.3 Utiliser les relations métriques du cercle et des polygones convexes pour résoudre des problèmes

- Démonstration de propositions portant sur le cercle

Un ensemble de points est cyclique ou concyclique si tous les points se trouvent sur la circonférence du même cercle.



Un polygone dont tous les sommets se trouvent sur le même cercle est un polygone cyclique.
Le pentagone ABCDE est un pentagone cyclique inscrit dans un cercle de centre O.

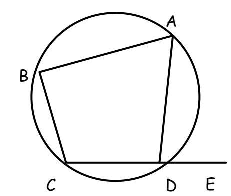
Tous les triangles sont cycliques, car il est toujours possible de tracer un cercle qui passe par trois points non colinéaires. Le centre du cercle est le point d'intersection des médiatrices de deux des côtés du triangle.

Théorème

- Les angles opposés d'un quadrilatère cyclique sont supplémentaires.
- Chaque angle extérieur d'un quadrilatère cyclique est égal à l'angle intérieur opposé.
- Le segment de droite qui relie deux sommets d'un quadrilatère cyclique sous-tend des angles égaux en deux autres sommets situés du même côté de ce segment.

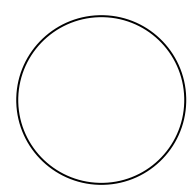
Il ne faut pas oublier que les réciproques sont aussi vraies.

Ex : Prouve qu'un angle extérieur d'un quadrilatère cyclique est égal à l'angle intérieur opposé.
Soit : Le quadrilatère cyclique ABCD, où CD se prolonge jusqu'à E
Prouve que : <ABC = <ADE



Énoncés	Justifications
<ABC + <ADC = 180°	
<ADE + <ADC = 180°	
<ABC + <ADC = <ADE + <ADC	
<ABC = <ADE	

Ex : ABCD est un quadrilatère cyclique; O est le centre du cercle; <AOB = 110°; <DAO = 40°. Trouve les mesures de <OAB, <BCD et <BCE. Montre ton raisonnement.



Faire ex. 5 du livre p. 419

****7.4 Les quadrilatères cycliques p. 419   # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 24*

◊ Tangente

Une tangente est une droite qui coupe un cercle en exactement un point. Le point d'intersection est appelé point de tangence.

Théorème

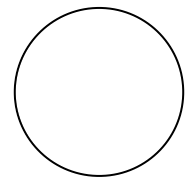
- Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon au point de tangence.
- Les segments tangents à un cercle qui passent par n'importe quel point extérieur sont congruents.

Ex : Prouve que les segments tangents à un cercle qui passent par n'importe quel point extérieur au cercle sont congruents.

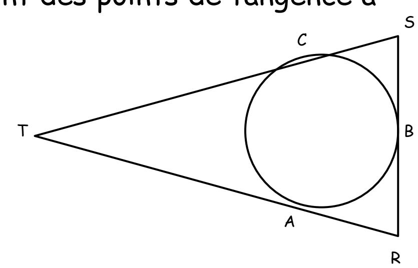
Soit : un cercle de centre O; les segments tangents PA et PB tracés à partir d'un point extérieur P.

Prouve que : PA = PB

Énoncés	Justifications
AO = BO	
OP = OP	
<PAO = <PBO = 90°	
ΔPAO = ΔBOP	
PA = PB	



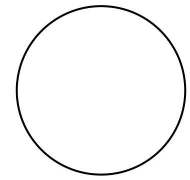
Ex : Dans le ΔTSR, TS = TR, et le périmètre mesure 44cm. A, B et C sont des points de tangence à un cercle. SC 6cm. Trouve la longueur de TR. Montre ton raisonnement.



Ex : prouve que l'angle formé par une tangente et une corde est égal à l'angle inscrit situé du côté opposé de cette corde et sous-tendu par cette corde.

Soit : un cercle de centre O; la tangente PC; la corde PB; <BPC, l'angle formé par la tangente et la corde; <PAB, un angle inscrit situé du côté opposé de la corde par rapport à <BPC.

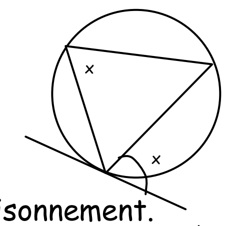
Prouve que : <BPC = <PAB



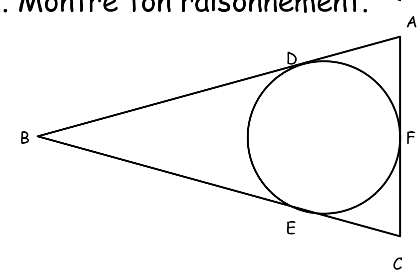
Énoncés	Justifications
<OPC = 90°	
<OPB = <OPC -	
<OPB = 90° - <BPC	
OP = OB	
<OBP = <OPB	
<OBP + <OPB + <POB = 180°	
<OPB + <OPB + <POB = 180°	
<POB = 180° - 2<OPB	
<POB = 180° - 2(90° - <BPC)	
<POB = 180° - 180° - 2<BPC	
<POB = 2<BPC	
<POB = 2<PAB	
<BPC = <PAB	

Théorème

L'angle formé par une tangente et une corde est égal à l'angle inscrit situé du côté opposé de cette corde et sous-tendu par cette corde.



Ex : Soit <DFE = 70° et <CEF = 60°. Trouve les mesure de <ABC et <ADF. Montre ton raisonnement.



****7.5 Les tangentes à un cercle p. 431 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 26*

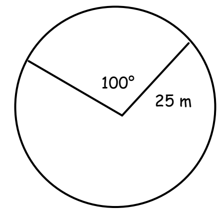
◊ Arc
◊ Secteur

Un secteur de cercle est une région délimitée par deux rayons et leur arc intercepté. L'angle au centre est aussi appelé angle de secteur.

On sait que la circonférence d'un cercle est $C = 2\pi r$, et l'aire d'un cercle $A = \pi r^2$.

Ex : Un aspergeur pivote vers la droite puis vers la gauche en décrivant chaque fois un angle de 100°. L'eau est projetée à une disance maximale de 25 m.

a) Quelle est la longueur de l'arc du secteur irrigué, au mètre près ?



b) Quelle est l'aire du secteur irrigué, au mètre carré près ?

Ex : La chaîne d'une bicyclette relie deux roues d'engrenage dont les diamètres mesurent 21 cm et 9 cm. Les centres des roues se trouvent à 89 cm l'un de l'autre. Détermine la longueur minimale de chaîne requise, au centimètre près.

****7.6 La longueur d'un arc et l'aire d'un secteur p. 435 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37,*

Révisions p. 446 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21