Mathématiques 30321

Module 5
L'algèbre - la géométrie et le cercle

3. Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.3 démontrer sa compréhension de la relation entre l'algèbre et la géométrie en utilisant les concepts géométriques du plan cartésien dans la résolution de problèmes et la démonstration de propriétés

- Démonstration analytique
- Relations entre les points du plan cartésien
  - ◊ Point de partage de segment

Rappel : pour deux points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$

La pente de P_1P_2 est $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Le point milieu de P_1P_2, M, est $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

La distance de P_1 à P_2 est $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- L'abscisse à l'origine est la valeur de x quand y = 0.
- L'ordonnée à l'origine est la valeur de y quand x =0.
- Les pentes des droites parallèles sont égales et les pentes des droites perpendiculaires sont les inverses et de signes contraires.

Ex : Vérifions un triangle rectangle

a) Vérifie si A(-1, 2), B(3, 0) et C(1, -4) sont les sommets d'une triangle rectangle.

Pour AB,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{0 - 2}{3 + 1}$$
$$m = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

pour BC,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{-4 - 0}{1 - 3}$$
$$m = \frac{-4}{-2} = 2$$

pour CA

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{2 + 4}{1 + 1}$$
$$m = \frac{6}{2} = 3$$

Les segments AB et BC ont des pentes inverses et de signes contraires donc elles sont perpendiculaires.

b) le Δ ABC est-il isocèle? Justifie ta réponse.

Pour qu'un triangle soit isocèle, il lui faut 2 côtés de la même longueur.

Pour AB,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-2)^2}$$
$$d = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$$
$$d = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

pour BC,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (-4-0)^2}$$
$$d = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}$$
$$d = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

pour CA

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(1+1)^2 + (-4-2)^2}$$
$$d = \sqrt{2^2 + (-6)^2}$$
$$d = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

mAB = mBC donc c'est un triangle isocèle.

Ex : Vérifie si les diagonales de ce parallélogramme, dont les sommets sont W(-2, 1), X(3, 3), Y(4, -1) et Z(-1, -3), se coupent en leur milieu.

Diagonale WY

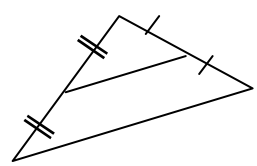
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$$
$$\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1,0)$$

diagonale XZ

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{3-3}{2}\right)$$
$$\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1,0)$$

les diagonales ont le même point milieu donc oui elles se coupent en leur point milieu.

Un segment milieu est un segment qui relie les points milieu de deux côtés d'un triangle.



Théorème du segment milieu d'un triangle

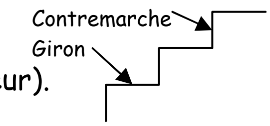
Si un segment relie les points milieu de deux côtés d'un triangle, alors ce segment est parallèle au troisième côté d'un triangle et a la moitié de sa longueur.

****8.1 Le lien entre la géométrie analytique et la géométrie plane p. 460*
 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17

****Découvertes mathématiques p.462 ❶1ab, 2, 3ac, 4, 7, 8 ❷ 1ab, 2, 3ac, 4, 7, 8 ❸ 1, 2*

La division d'un segment de droite

En architecture, il arrive que les marches ou les escaliers constituent la pièce maîtresse d'un édifice. Le principe mathématique qui sous-tend la construction de marches d'escalier repose sur la division d'un segment de droite en parties égales.



Un escalier comprend des contremarches (hauteur) et des girons (profondeur).

Ex : Si on doit construire un escalier qui couvrira une distance horizontale de 4,0 m et qui s'élèvera verticalement sur une hauteur de 2,4 m.
Il faut décider combien de marches on veut.
S'il y a dix marches, alors les girons seront de 4,0/10 = 0,4m pour chaque marche, et les contremarches seront de 2,4/10 = 0,24m.

Donc pour un segment de droite, où on connaît les extrémités, on veut trouver la longueur horizontale et la longueur verticale qui nous permettra de diviser notre segment en parties égales.

Ex : Détermine les coordonnées des points qui divisent en cinq parties congruentes le segment de droite qui relie A(-3, 6) et B(7, -9).

La distance horizontale entre A et B est
$|x_2 - x_1| = |7 - (-3)| = |10| = 10$
on veut la diviser en 5 parties égales, donc $^{10}/_{5} = 2$

La distance verticale entre A et B est
$|y_2 - y_1| = |-9 - 6| = |-15| = 15$
on veut la diviser en 5 parties égales, donc $^{15}/_{5} = 3$

Pour trouver le premier point en partant du point A, tu veux aller 2 unités vers la droite et 3 unités vers le bas, (x + 2, y – 3), le deuxième point, (x + 2(2), y – 2(3)), le troisième point (x + 3(2), y – 3(3)), le quatrième point, (x + 4(2), y – 4(3)). On peut trouver le cinquième point pour voir si on arrive au point B en faisant (x + 5(2), y – 5(3)).

Les points de partage sont donc, (-1, 3), (1, 0), (3, -3), (5, -6).

****8.2 La division de segment de droite p. 467*
 # 1, 3, 6, 11, 15, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 30

- Relation entre un point et une droite
  - ◊ Distance entre un point et une droite

Ex : Détermine la distance la plus courte entre l'origine et la droite définie par l'équation
y = 2x – 10, au dixième près.

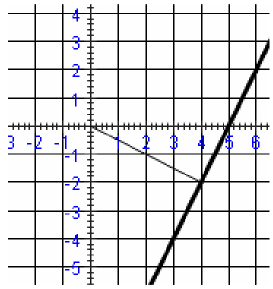
Il faut trouver l'équation de la perpendiculaire à y = 2x – 10 qui passe par (0, 0), si la pente de la perpendiculaire est de $^{-1}/_{2}$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{y - 0}{x - 0}$$ on multiplie croisé

2y = -x

y = - ½x



pour trouver la distance de (0, 0) à (4, -2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (4 - 0)^2}$$

$$d = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 4{,}5$$

donc la distance la plus courte entre l'origine et la droite y = 2x – 10 est de 4,5.

on veut savoir où les deux droites se coupent

-½x = 2x – 10	y = 2x – 10
-x = 4x – 20	y = 2(4) – 10 (4, -2)
-5x = -20	y = 8 – 10
x = 4	y = -2

Ex : Détermine la distance entre le point P(-1, 3) et la droite définie par l'équation x + y - 5 = 0, au dixième près.

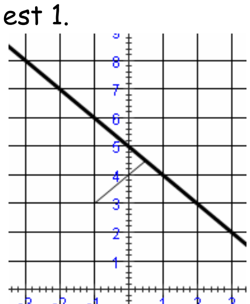
Y = -x + 5, la pente de la perpendiculaire est 1.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$1 = \frac{y - 3}{x - (-1)}$$ on multiplie croisé

y - 3 = x + 1

y = x + 4



pour trouver la distance de (-1, 3) à (0,5, 4,5)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0{,}5 - (-1))^2 + (4{,}5 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{(1{,}5)^2 + (1{,}5)^2} = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25}$$

$$= \sqrt{4{,}5} = 2{,}1$$

donc la distance la plus courte entre P(-1, 3) et la droite x + y – 5 = 0 est de 2,1.

on veut savoir où les deux droites se coupent

x + 4 = -x + 5	Y = -x + 5
2x = 1	Y = -0,5 + 5
x = ½ = 0,5	Y = 4,5

(0,5, 4,5)

- ◊ Distance entre deux droites parallèles

Pour trouver la distance verticale entre deux droites parallèles, il faut trouver la différence entre les deux ordonnées à l'origine.

Pour trouver la distance horizontale entre deux droites parallèles, il faut trouver la différence entre les deux abscisses à l'origine.

Pour trouver la distance la plus courte entre deux droites parallèles, il faut choisir un point sur une des droites et faire le même travail que les autres exemples.

Ex : trouve la distance verticale, horizontale et la distance la plus courte entre y = 2x + 3 et y = 2x – 4.

****8.3 Les distances entre des points et des droites p. 475*

 # 1, 3, 7, 9, 11, 15, 23, 31, 35, 39, 41, 47, 54, 55

- Équation du lieu géométrique

Un lieu géométrique est un ensemble de points déterminé par une condition donnée. Par exemple, un chien est retenu par une laisse de 10m attachée à un poteau planté au milieu d'une grande cour, alors le lieu géométrique des points les plus éloignés que le chien peut atteindre est un cercle de rayon de 10m.

- Le cercle dans le plan cartésien

Le cercle est un lieu géométrique des points du plan qui sont équidistant d'un point fixe, qu'on appelle le centre.

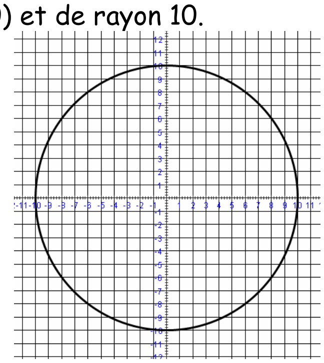
L'équation d'un cercle de centre (h, k) et de rayon r est définie par l'équation canonique $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ex : Détermine l'équation de chacun des cercles suivants :

a) cercle de centre (0, 0) et de rayon 10.

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$

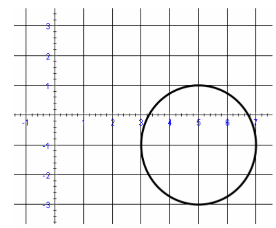
$x^2 + y^2 = 100$



b) cercle de centre (5, -1) et de rayon 2.

$(x - 5)^2 + (y - (-1))^2 = 2^2$

$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 4$



c) cercle de centre (-1, 2) qui passe par le point (3, 1).

Il faut trouver la longueur du rayon avec la formule de la distance.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (3 - 2)^2}$$

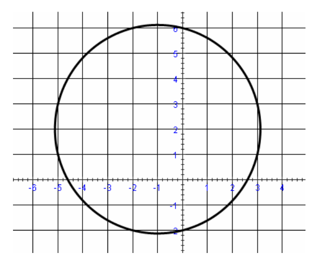
$$d = \sqrt{(4)^2 + (1)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{17})^2$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 17$



- Équation du cercle

◊ Générale

L'équation du cercle sous la forme générale s'écrit : $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, où D, E et F sont des coefficients.

◊ Canonique (standard)

L'équation du cercle sous la forme standard s'écrit : $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, d'où la coordonnée (h, k) donne le centre du cercle et r est la longueur du rayon.

Rappel : Formule quadratique générale : x = $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

◊ Passage d'une forme à l'autre

Pour changer de la forme standard à la forme générale :

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 25$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

Pour changer de l'équation générale à la forme standard : (il faut faire la complétion du carré)

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$
$$x^2 - 2x + y^2 + 6y - 15 = 0$$
$$(x^2 - 2x + \underline{1}) - \underline{1} + (y^2 + 6y + \underline{9}) - \underline{9} - 15 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 25 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Ex : Écris l'équation du cercle dont le centre est (4, -1) et qui passe par (3, 7) dans sa forme standard et dans sa forme générale.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(3 - 4)^2 + (7 - (-1))^2 = r^2$$
$$(-1)^2 + (8)^2 = r^2$$
$$1 + 64 = r^2$$
$$65 = r^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - (-1))^2 = 65$$
$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 65 \quad \text{Forme standard}$$
$$x^2 - 4x - 4x + 16 + y^2 + y + y + 1 - 65 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 48 = 0 \quad \text{Forme générale}$$

Ex : Trouve l'équation du cercle dont les extrémités du diamètre sont (-2, 5) et (6, 9).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{PM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$d = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (9 - 5)^2} \qquad \text{PM} = \left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{5 + 9}{2}\right)$$
$$d = \sqrt{(8)^2 + (4)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \qquad \text{PM} = \left(\frac{4}{2}, \frac{14}{2}\right) = (2,7)$$
$$r = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 20$$

***8.4 l'équation d'un cercle p. 481*

 # 1, 5, 9, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 51

Et trouve le centre et le rayon de chaque cercle.

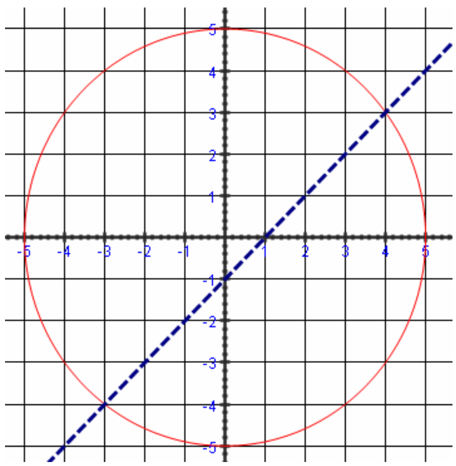
1. $x^2 - 6x + y^2 - 8y - 39 = 0$
2. $x^2 - 7x + y^2 + 7y = 17{,}75$
3. $x^2 + 8x + y^2 + 4y = 12$
4. $x^2 + 8 + y^2 - 8y = 0$
5. $x^2 + 6x + y^2 - 4y = 37$
6. $x^2 + 8x + y^2 + 10y + 13 = 0$

Mathématiques 30321

Les intersections de droites et de cercles

Une droite et un cercle peuvent se couper ou non. S'ils se coupent, on peut déterminer les coordonnées du point ou des points d'intersection grâce à un système d'équations qu'on résout algébriquement ou graphiquement.

Ex : Trouve les coordonnées des points d'intersection de la droite définie par l'équation y = x – 1 et du cercle défini par l'équation $x^2 + y^2 = 25$.

Graphiquement	Algébriquement
	$1)\, y = x - 1 \quad \textit{remplace dans la 2e équation}$ $2)\, x^2 + (x-1)^2 = 25$ $x^2 + x^2 - 2x + 1 - 25 = 0$ $2x^2 - 2x - 24 = 0$ $x^2 - x - 12 = 0$ $(x-4)(x+3) = 0$ $si\ \ x = 4 \quad ou \quad x = -3$ $y = 3 \qquad\qquad y = -4$ Donc, les points d'intersections sont (4, 3) et (-3, -4)

Ex. 2 p. 485 La pilote d'un petit avion se dirige vers le centre d'un système météorologique intense à une vitesse de 200 km/h. Elle décide de modifier sa trajectoire afin d'éviter le cœur de la tempête. Si on utilise un plan cartésien dans lequel l'avion se trouve à l'origine et où la longueur de côté de chaque carré représente 1 km, on peut représenter graphiquement le système météorologique par la relation $(x-20)^2 + (y-10)^2 = 49$. La nouvelle trajectoire de l'avion suit la droite définie par l'équation $y = 0{,}2x$ dans le quadrant I. L'avion évitera-t-il complètement le système météorologique? Sinon, combien de temps se trouvera-t-il à l'intérieur du système météorologique au dixième de minute près?

$$1)\, y = 0{,}2x \quad \textit{remplace dans la 2e équation}$$
$$2)\, (x-10)^2 + (0{,}2x - 10)^2 = 49$$
$$x^2 - 20x + 100 + 0{,}04x^2 - 4x + 100 - 49 = 0$$
$$1{,}04x^2 - 44x + 451 = 0$$
$$si\ \ x = 24{,}9 \quad ou \quad x = 17{,}4$$
$$y = 4{,}97 \qquad\qquad y = 3{,}49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{44 \pm \sqrt{(-44)^2 - 4(1{,}04)(451)}}{2(1{,}04)}$$
$$x = \frac{44 \pm \sqrt{1936 - 1876{,}16}}{2{,}08} = \frac{44 \pm \sqrt{59{,}84}}{2{,}08}$$
$$x = \frac{44 \pm 7{,}74}{2{,}08}$$
$$x = \frac{51{,}74}{2{,}08} = 24{,}9 \quad ou \quad x = \frac{36{,}26}{2{,}08} = 17{,}4$$

Alors la distance est de $d = \sqrt{(24{,}9 - 17{,}4)^2 + (4{,}97 - 3{,}49)^2} = 7{,}59$ Pour trouver le temps que l'avion prend à faire cette distance, $V = d/t \rightarrow t = d/V = 7{,}59/200 = 0{,}03795h,\ donc\ 0{,}03795h \times 60\ s/h = 2{,}277\,secondes$

Corde : une droite qui coupe un cercle en deux points.

Tangente : une droite qui coupe un cercle en un seul point. Ce point s'appelle le point de tangence.

Pour déterminer l'équation d'une tangente en n'importe quel point d'un cercle, tu peux utiliser la propriété suivante : « une tangente est perpendiculaire au rayon au point de tangence ».

Ex : Écris l'équation de la tangente au cercle défini par l'équation $x^2 + y^2 = 25$ au point P(3,4).

$$Centre(0,0)\ \ et\ \ P(3,4)$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

$$m \perp = \frac{-3}{4}$$
$$\text{Équation d'une droite } y = mx + b$$
$$4 = \frac{-3}{4}(3) + b$$
$$4 + \frac{9}{4} = b$$
$$b = \frac{25}{4}$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{25}{4}$$
$$4y = -3x + 25$$
$$3x + 4y - 25 = 0$$

Ex : 8,5 p. 488 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 39, 41, 47, 48, 49, 51, 67

****Révisions p. 516 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 29, 31, 32, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 46, 48*