Mathématiques 30321

Module 4 (11 cours)

L'ALGÈBRE - Suites et séries

2 Résultat d'apprentissage général

Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

2.1 modéliser des situations pouvant se traduire par des séries géométriques

❖ *Suites arithmétiques*

Rappel : Une suite est une liste ordonnée de nombres séparés par une virgule.

La formule qui décrit la relation entre chaque terme d'une suite et le terme qui le précède est appelée formule de récurrence. Dans la suite 5, 7, 10, 14… on peut définir la suite à l'aide de la formule de récurrence $t_n = t_{n-1} + 2$.

Exemple 1 : une façon de faire un étalage d'oranges consiste à les empiler en forme de pyramide à base carrée. Trouve une formule de récurrence pour la suite qui représente le nombre total d'oranges dans des pyramides à base carrée de plus en plus grandes.

Nombre d'étages	Nombre d'oranges de la base	Nombre total d'oranges
1	1	1
2	4	1 + 4 = 5
3	9	5 + 9 = 14
4	16	14 + 16 = 30
…	…	…
n	n^2	$t_{n-1} + n^2$

Donc la formule de récurrence est $t_n = t_{n-1} + n^2 ; où\ t_1 = 1$.

Une suite arithmétique est une suite dans laquelle il y a une différence constante d, appelée raison arithmétique, entre les termes successifs. $t_n = a + (n-1)d$ *, a étant le 1er terme, d la raison arithmétique.*

Exemple 2 : D'après la suite 1, 3, 5, 7, 9 … trouve le 20e terme.

$a = 1$
$d = 3 - 1 = 2$
$n = 20$

$t_n = a + (n-1)d$
$t_{20} = 1 + 19 \times 2 = 59$

le 20e terme est donc 59.

Exemple 3 : Si $t_{12} = 52$ *et* $t_{22} = 102$, trouve t_{18}.

$t_{22} = 102 = a + 21d$
$t_{12} = 52 = a + 11d$

avec soit la méthode d'élimination, substitution ou matrice on peut résoudre le système.

(1) $102 = a + 21d$
(2) $\underline{52 = a + 11d}$
(1) – (2) $50 = 10d$
$d = 5$

$102 = a + 21d$
$102 = a + 21 \times 5$
$102 = a + 105$
$a = -3$

$t_{18} = -3 + 17 \times 5$
$t_{18} = 82$

- *Séries arithmétiques*

Une <u>série arithmétique</u> est la somme des termes d'une suite. $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$*, elle peut aussi être écrite sous la forme* $\sum_{i=1}^{n} t_i$ *.*

Exemple 4 : $\sum_{k=1}^{5} 2k$

Si on remplace k par les valeurs de 1 à 5. $\sum_{k=1}^{5} 2k = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

On peut trouver la somme avec la formule de $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

$a = 2$
$d = 2$
$n = 5$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$
$$S_5 = \frac{5}{2}\left[2(2) + (5-1)2\right]$$
$$S_5 = 30$$

Ex : 6.1 p. 290 # 1, 4, 7, 10, 13, 17, 19, 22

Ex : 6.2 p. 295 # 1, 2, 3, 9, 14, 15, 19, 21, 25, 27, 32, 35, 36

- *Suites géométriques*

Une suite géométrique est une suite de termes dont un terme est le produit du terme précédent par un facteur fixe. $t_n = ar^{n-1}$ *, où a est le premier terme et r est la raison géométrique, soit le 2e terme divisé par le 1er terme.*

Exemple 1 : Utilisons la suite géométrique 5, 10, 20, 40, 80…

a) Écris la règle de construction de la suite de la forme $t_n = ar^{n-1}$.

$a = 5$
$r = 2$
$n = n$

$t_n = ar^{n-1}$
$t_n = 5(2)^{n-1}$

b) Détermine la valeur de t_8.

$a = 5$
$r = 2$
$n = 8$

$t_n = ar^{n-1}$
$t_8 = 5(2)^{8-1} = 640$

Exemple 2 : Après chaque lavage, un blue-jean perd 1% de sa teinture. Quel pourcentage de la teinture originale restera-t-il après 10 lavages?

$a = 1$
$r = 1 - 10\% = 99\% = 0{,}99$
$n = 11$

$t_n = ar^{n-1}$
$t_{11} = 1(0{,}99)^{11-1} = 0{,}904382$

Après 10 lavages, il restera environ 90% de la teinture.

Exemple 3 : Les projections démographiques constituent un élément important de la planification gouvernementale. En 1990, la population du Canada était de 26,6 millions de personnes. En 2025, on prévoit qu'elle s'élèvera à 38,4 millions de personnes. Si cette projection était basée sur une suite géométrique, quel serait le taux de croissance annuel?

$a = 26{,}6 millions$
$r = ?$
$n = 2025 - 1990 + 1 = 36$
$t_{36} = 38{,}4 millions$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_{36} = 26{,}6(r)^{36-1} = 38{,}4$$
$$r^{35} = \frac{38{,}4}{26{,}6}$$
$$\left(r^{35}\right)^{1/35} = (1{,}443609)^{1/35}$$
$$r = 1{,}010105$$

Le taux de croissance annuel est de 1,01%

Exemple 4 : Deux ans après l'achat, la valeur de revente d'une voiture est de 10 000$. Trois ans plus tard, cette valeur de revente est de 5000$. Si la dépréciation annuelle de la voiture forme une suite géométrique, quel était le prix original de la voiture?

$t_{32} = 10000$
$t_5 = 5000$
$a = ?$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_3 = ar^2 = 10000$$
$$t_5 = ar^5 = 5000$$
$$\frac{t_6}{t_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{5000}{10000}$$
$$r^3 = 0{,}5$$
$$r = 0{,}793700526$$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_3 = a(0{,}793700526)^2 = 10000$$
$$0{,}629960524a = 10000$$
$$a = 15874{,}01052$$

Le prix original de la voiture était de 15874$

Exercices 6,3 p.300 # 1, 3, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 30

- Séries géométriques (sigma)

Une série géométrique est la somme des termes d'une suite géométrique. On la calcule à l'aide de la formule : $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

Exemple 1 : trouve la somme des 12 premiers termes de la suite $1 + {}^1/_3 + {}^1/_9 + {}^1/_{27} + \ldots$

$$a = 1 \qquad r = \frac{1}{3} \qquad n = 12$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{12} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_{12} = \frac{1-\frac{1}{531441}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_{12} = \frac{531441-1}{531441}\times\frac{3}{2} = 1{,}499997$$

Exemple 2 : Utilisons la somme d'une suite géométrique

Le plus haut totem jamais sculpté dans une bille de bois mesure 38,28 m de haut et se trouve à Beacon Hill Park, à Victoria, en Colombie-Britannique. Si on laisse tomber une balle de lacrosse du haut de ce totem et qu'elle rebondit à 60% de sa hauteur initiale, trouve la distance totale parcourue par la balle au moment où elle touche le sol pour la dixième fois.

2e fois qu'elle touche par terre

38,28 + 2x38,28(60%) + 2x38,28(60%)^2 + …. donc la suite est 76,56(0,6), 76,56(0,6)^2, …76,56(0,6)^9

$S_9 = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{(76{,}56(0{,}6))(1-0{,}60^9)}{1-0{,}60} =$ 113,68, on doit aussi additionner la hauteur du départ qui est 38,28 donc la distance totale est 151,96m.

On peut également utiliser le signe de sigma pour écrire une série géométrique $\sum_{k=1}^{4} 3^k$, ce qui veut dire que le terme $t_n = 3^n$ et le n = 1 jusqu'à n = 4.

$\sum_{k=1}^{4} 3^k = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 3 + 9 + 27 + 81 = 120$

Exemple 3 : Écris la série géométrique suivante sous la forme de sigma.
Ensuite, trouve la somme. $8 + 4 + 2 + \ldots + {}^1/_{64}$

$$a = 8 \qquad r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad n = n$$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$t_n = \frac{1}{64} = ar^{n-1}$$
$$\frac{1}{64\times 8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{1}{512} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$9 = n-1$$
$$n = 10$$

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$S_{10} = \frac{8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 15{,}984375$$

Exercices 6.5 p.309 #1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22a, 23, 24, 27, 28

- Séries géométriques infinies

Imagine que tu te tiens à 100m d'une porte d'entrée. Pour t'approcher de la porte, tu parcours d'abord la moitié de la distance qui te sépare de la porte, puis tu parcours la moitié de la distance qui te reste, et encore la moitié de la distance qu'il te reste et ainsi que suite aussi longtemps que possible. Écris la suite des distances parcourues à chaque déplacement.

50, 25, $^{25}/_{2}$, $^{25}/_{4}$, $^{25}/_{8}$, $^{25}/_{16}$, $^{25}/_{32}$...

C'est une suite géométrique de raison ½ . donc la somme serait $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{100(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$, mais plus la valeur de n augmente plus la valeur de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se rapproche de 0, donc dans une suite géométrique infinie on peut laisser tomber cette partie de l'équation, ce qui devient $S_n = \dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.

Exemple 1 : Trouve la somme de la série 25 – 5 + 1 – $^1/_5$ + $^1/_{25}$ – $^1/_{125}$...

$$a = 25 \qquad r = \frac{-1}{5} \qquad n = \infty$$

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$
$$S_n = \frac{25}{1-(-\frac{1}{5})} = \frac{125}{6}$$

Exemple 2 : Diminution des ressources.

Le mois dernier, un puits a produit 15000 m^3 de pétrole. On sait que sa production diminue de 2,9% par mois.

a) Combien de pétrole ce puits produira-t-il au cours de la prochaine année?

a = 15000(0,971) = 14565; r = 1 - 2,9% = 0,971; n = 12

$$a = 15000(0{,}971) = 14565$$
$$r = 1 - 2{,}9\% = 0{,}971$$
$$n = 12$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$S_{12} = \frac{14565(1-(0{,}971)^{12})}{1-0{,}971}$$
$$S_{12} = 149249{,}459$$

Donc, la production au cours des 12 prochains mois serait de 149429,459 m^3 de pétrole.

b) Estime la production future totale de ce puits si on l'exploite.

$$a = 15000(0{,}971) = 14565$$
$$r = 1 - 2{,}9\% = 0{,}971$$
$$n = \infty$$

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$
$$S_\infty = \frac{14565}{1-0{,}971}$$
$$S_\infty = 502241{,}379$$

Donc, la production totale serait de 502241,379 m^3 de pétrole.

Exemple 3 : Écris le décimal périodique 1,10365365365...sous forme fractionnaire.

$$1{,}10365365365... = 1{,}10 + \frac{365}{100000} + \frac{365}{100000000} + \frac{365}{100000000000} + ... = 1{,}10365365365... = 1{,}10 + \frac{365}{10^5} + \frac{365}{10^8} + \frac{365}{10^{11}} + ...$$

$$a = \frac{365}{10^5} \qquad r = \frac{1}{10^3} \qquad n = \infty$$

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$
$$S_\infty = \frac{\frac{365}{10^5}}{1-\frac{1}{1000}}$$
$$S_\infty = \frac{365}{100000} \times \frac{1000}{1000-1} = \frac{365}{99900} = \frac{73}{19980}$$

$$\frac{110}{100} + \frac{73}{19980}$$
$$= \frac{110(1998) + 73(10)}{199800}$$
$$= \frac{219780 + 730}{199800} = \frac{220510}{199800} = \frac{22051}{19980}$$

Exercices 6,6 p.316 #1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17ace, 18, 19, 20, 21

Exercices de révisions : p.324 # 1, 3, 5, 7, 9, 10, 14, 18, 23, 29, 31, 33, 35, 37, 41, 42, 43, 44, 45