

Mathématiques 30321

Module 1

L'algèbre (10 cours)

3. Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.1 résoudre des problèmes se traduisant par une équation ou une inéquation polynomiale de degré supérieur à 1.

- Caractéristiques d'une fonction quadratique à partir de son graphique ou de sa règle
 - ❖ *Domaine et image*
 - ❖ *Extremum*
 - ❖ *Équation de l'axe de symétrie*
 - ❖ *Coordonnées du sommet*
 - ❖ *Croissance et décroissance*
 - ◇ *Signe*
 - ◇ *Racine(s) et ordonnées à l'origine*

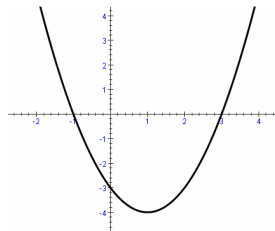
Résoudre une équation quadratique veut dire qu'on veut trouver les valeurs de x pour lesquelles $y = 0$. Il y a deux racines car le x est au carré.

Pour résoudre graphiquement, on trace la parabole et on trouve où la parabole coupe l'axe des x .

Ex : $y = x^2 - 2x - 3$

$$0 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$$

$$0 = (x - 1)^2 - 4 \quad \text{sommet } (1, -4)$$



$$\text{Domaine} =]-\infty, \infty[$$

$$\text{Image} = [-4, \infty[$$

$$\text{Équation de l'axe de symétrie } x = 1$$
$$S(1, -4)$$

$$\uparrow]1, \infty[\quad \downarrow]-\infty, 1[$$

$$\text{Racines : } x = -1 \text{ et } x = 3 \quad O(0, -3)$$

$$+]0, -1[\cup]3, \infty[\quad -]-1, 3[$$

Il faut faire la vérification de nos réponses pour voir si elles sont bonnes.

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$0 = (-1)^2 - 2(-1) - 3$$

$$0 = 1 + 2 - 3$$

$$0 = 0$$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$0 = (3)^2 - 2(3) - 3$$

$$0 = 9 - 6 - 3$$

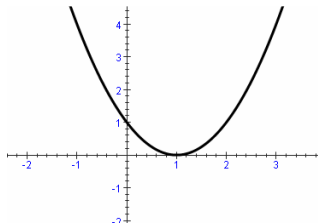
$$0 = 0$$

Ex : $y = x^2 - 2x + 1$

$$0 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 1$$

$$0 = (x - 1)^2 \quad \text{sommet } (1, 0)$$

Donc $x = 1$ et $x = 1$, deux racines égales



$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = (1)^2 - 2(1) + 1$$

$$0 = 1 - 2 + 1$$

$$0 = 0$$

Ex : il peut aussi arriver qu'il n'y ait pas de racines, c'est à dire que le graphique ne touche pas l'axe des x .

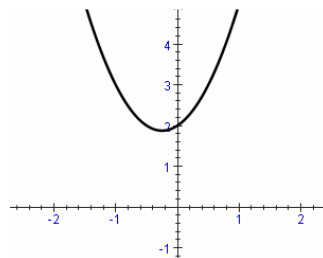
$$y = 2x^2 + x + 2$$

$$0 = 2((x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}) - \frac{1}{16} + 1)$$

$$0 = 2((x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{16}{16})$$

$$0 = 2((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16})$$

$$0 = 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8} \quad \text{sommet } (-\frac{1}{4}, \frac{15}{8})$$



Ne touche pas l'axe des x donc aucune racine réelle.

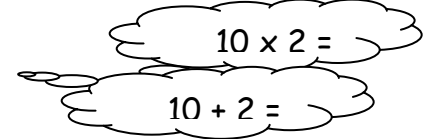
Mathématiques 30321

❖ Factorisation

Factorisation de trinômes : (1^{ère} partie)

La multiplication de 2 binômes donne habituellement une troisième expression appelée trinôme (3 termes).

Il y a une relation importante dans $(x + 10)(x + 2) = x^2 + 12x + 20$



Tu peux souvent factoriser un trinôme en l'exprimant sous forme de produit de 2 binômes.

Si le 3^e terme est positif, les deux signes sont les mêmes, si le 3^e terme est négatif, les deux signes sont différents.

Ex 1 : $x^2 + 11x + 18$
 Il faut donc trouver deux nombres
 additionnés ensemble qui donne 11
 multipliés ensemble qui donne 18
 donc les facteurs sont $(x + 2)(x + 9)$

19 11 9
 $(1 + 18) (2 + 9) (3 + 6)$
 **trouve les facteurs de 18 $(1 \times 18) (2 \times 9) (3 \times 6)$

Ex 2 : $y^2 - 3y - 28$
 Il faut donc trouver deux nombres
 additionnés ensemble qui donne -3
 multipliés ensemble qui donne -28
 donc les facteurs sont $(y + 4)(y - 7)$

-27 -13 -3
 $(1 - 28) (2 - 14) (4 - 7)$
 **trouve les facteurs de -28 $(1 \times -28) (2 \times -14) (4 \times -7)$

Ex 3 : $3t^2 - 30t + 48$
 Il faut donc factoriser le facteur commun avant $3(t^2 - 10t + 12)$
 Il faut trouver deux nombres

additionnés ensemble qui donne -10
 multipliés ensemble qui donne 16
 donc les facteurs sont $3(t - 2)(t - 8)$

-17 -10 -8
 $(-1 - 16) (-2 - 8) (-4 - 4)$
 **trouve les facteurs de 16 $(-1 \times -16) (-2 \times -8) (-4 \times -4)$

Factorisation de trinômes : (2^e partie)

Quand le nombre devant le terme au carrée ne se divise pas dans les trois termes, il faut une méthode différente pour factoriser.

$$2a^2 + 5a + 3 = \frac{(2a + *) (2a + \dagger)}{2}$$

On multiplie le 1^{er} et le 3^e terme.

Il faut trouver deux nombres
 additionnés ensemble qui donne 5
 multipliés ensemble qui donne 6
 donc les facteurs sont $(a + 2)(2a + 3)$

7 5
 $(1 + 6) (2 + 3)$
 **trouve les facteurs de 6 $(1 \times 6) (2 \times 3)$
 $= \frac{(2a + 2)(2a + 3)}{2}$
 $= (a + 2)(2a + 3)$

ou

Ex : $2x^2 - 5x + 3 =$
 $2x^2 - 3x - 2x + 3$
 $x(2x - 3) - 1(2x - 3)$
 $(2x - 3)(x - 1)$

2 nombres multipliés ensemble qui donnent 6
 Et additionnés qui donnent -5. (-2 et -3)

Mathématiques 30321

Différence de carrés

Tu peux factoriser rapidement plusieurs types d'expressions si tu retrouves une régularité.

Quand tu développes deux binômes semblables mais de signes différents, le terme du milieu est 0.

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7x + 7x - 49 = x^2 - 49$$

Donc quand on factorise un binôme dont chaque terme est un carré parfait, les facteurs sont des binômes semblables mais de signes contraires.

$$\text{Ex : } x^2 - 81y^2 = (x - 9y)(x + 9y)$$

$$\text{Ex : } 5a^3 - 45a = 5a(a^2 - 9) = 5a(a - 3)(a + 3)$$

$$\text{Ex : } x^4 - 5x^2 - 36 = (x^2 - 9)(x^2 + 4) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 4)$$

Résolution d'équations à l'aide de la factorisation

Des équations telles que $ax^2 + bx + c = 0$ sont des équations quadratiques. Il suffit de factoriser l'équation pour trouver les valeurs de la variable. Un des deux facteurs doit être égal à 0, donc on peut résoudre les équations du premier degré qui en résultent.

$$\text{Ex : } x^2 + 3x - 28 = 0$$

Il faut trouver deux nombres

| | | | | |
|--------------------------------|-----|-----------|-----------|----------|
| | | 27 | 12 | 3 |
| additionnés ensemble qui donne | 3 | (-1 + 28) | (-2 + 14) | (-4 + 7) |
| multipliés ensemble qui donne | -28 | (-1 × 28) | (-2 × 14) | (-4 × 7) |

$$\begin{aligned} \text{donc } (x - 4)(x + 7) &= 0 \\ x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 7 &= 0 \\ x = 4 \quad \text{ou} \quad x &= -7 \end{aligned}$$

Ex : forme une équation quadratique dont les racines sont 2 et -4.

$$\begin{aligned} x = 2 \text{ et } x = -4 \\ x - 2 = 0 \text{ et } x + 4 = 0 \\ \text{donc } (x - 2)(x + 4) &= 0 \\ x^2 - 2x + 4x - 8 &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ex : } \frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-1} = -6 \quad \text{Il faut multiplier par le}$$

dénominateur commun $(x+1)(x-1)$

$$\frac{(x+1)(x-1)2}{(x+1)} + \frac{(x+1)(x-1)5}{(x-1)} = -6(x+1)(x-1)$$

$$2(x-1) + 5(x+1) + 6(x+1)(x-1) = 0$$

$$2x - 2 + 5x + 5 + 6(x^2 - 1) = 0$$

$$6x^2 + 7x + 3 - 6 = 0$$

$$6x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$6x^2 + 9x - 2x - 3 = 0$$

$$3x(2x + 3) - 1(2x + 3) = 0$$

$$(2x + 3)(3x - 1) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad 3x - 1 = 0$$

$$2x = -3 \quad 3x = 1$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad x = \frac{1}{3}$$

Résoudre des problèmes écrits par factorisation

Ex : La largeur d'un rectangle mesure 2m de moins que sa longueur. L'aire du rectangle mesure 48m². Détermine les dimensions du rectangle.

Soit x la longueur du rectangle Aire = longueur × largeur

$$x - 2 \text{ la largeur du rectangle} \quad 48 = x(x - 2)$$

$$\text{Aire} = 48 \text{ m}^2 \quad 0 = x^2 - 2x - 48$$

$$0 = (x - 8)(x + 6)$$

$$x = 8 \text{ et } x = -6$$

On ne peut pas avoir une longueur négative donc le -6 est rejeté.

Le rectangle est de 8m de long par 6 m de large.

*** 4.1 Résolvons graphiquement des équations quadratiques p. 155 2, 4, 20, 22

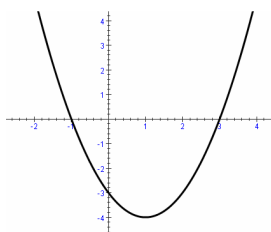
*** 4.2 Décomposons en facteurs pour résoudre des équations quadratiques p. 160 # 2, 4, 6, 16, 18, 34, 36, 48, 50, 64, 66, 70, 75, 81

Mathématiques 30321

◇ complétion de carré

Une troisième méthode pour trouver les racines est la complétion du carré, on fait le même travail que ce qu'on faisait pour placer l'équation sous la forme canonique, mais on peut ajouter des étapes car on cherche les valeurs de x lorsque $y = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ex : } y &= x^2 - 2x - 3 \\
 (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 &= 0 \\
 (x - 1)^2 - 4 &= 0 \\
 (x - 1)^2 &= 4 \quad \text{On fait la racine carrée de chaque côté.} \\
 \sqrt{(x-1)^2} &= \sqrt{4} \\
 \pm (x - 1) &= 2 \quad \text{on peut transférer le } \pm \text{ de l'autre côté.} \\
 x - 1 &= \pm 2 \\
 \text{donc } x &= 1 \pm 2 \\
 x = 1 + 2 = 3 \quad \text{ou } x = 1 - 2 = -1
 \end{aligned}$$



Donc
 $x = -1$ et $x = 3$ deux racines différentes

Si on arrive à une réponse qui n'a pas une racine entière, on peut laisser la réponse avec la racine, mais il faut la simplifier.

$$\text{Ex : } 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$2[(x^2 - 2x + 1) - 1 - \frac{7}{2}] = 0$$

$$2[(x - 1)^2 - \frac{7}{2} - \frac{7}{2}] = 0 \quad \text{Si on divise par 2 de chaque côté, on se débarrasse du 2}$$

$$(x - 1)^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$(x - 1)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\pm(x-1) = \frac{3}{\sqrt{2}} x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$x - 1 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

Je fais la racine de chaque côté.

On peut trouver la racine de 9, mais pas la racine de 2

On ne doit pas laisser une racine au dénominateur, donc pour le simplifier,

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le dénominateur.

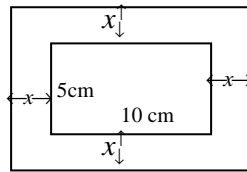
*** 4.3 racines carrées p. 165 # 1, 3, 5, 21, 23, 25, 45, 47, 49, 51, 53, 55

*** 4.4 Complétons le carré p. 172 # 15, 17, 19, 21, 27, 29, 31, 35, 37, 39, 51, 54

Mathématiques 30321

Applications

Ex : Avant d'encadrer une photographie de 10 cm sur 5 cm, on doit l'entourer d'un cache. La largeur du cache doit être la même de chaque côté de la photographie. L'aire du cache doit mesurer le double de l'aire de la photographie. Quelle est la largeur du cache ?



Il faut débiter par faire le schéma.
Soit x , la largeur du cache, en cm.

On sait que l'aire d'un rectangle, c'est la largeur \times la longueur. Le cadre mesure $(5 + 2x)$ et $(10 + 2x)$. La photographie a une aire de $5 \times 10 = 50$ et l'aire du cache est le double donc 100. Alors, l'aire totale est de 150 cm^2 .

$$\begin{aligned} (5 + 2x)(10 + 2x) &= 150 \\ 50 + 10x + 20x + 4x^2 &= 150 \\ 4x^2 + 30x - 100 &= 0 \\ 4(x^2 + \frac{30}{4}x + \frac{225}{16}) - \frac{400}{16} &= 0 \\ (x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{225}{16}) - \frac{225}{16} - \frac{400}{16} &= 0 \\ (x + \frac{15}{4})^2 - \frac{625}{16} &= 0 \\ (x + \frac{15}{4})^2 &= \frac{625}{16} \\ (x + \frac{15}{4}) &= \pm \frac{25}{4} \\ x = -\frac{15}{4} + \frac{25}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{15}{4} - \frac{25}{4} \\ x = \frac{10}{4} \quad \quad \quad x = -\frac{40}{4} \\ x = \frac{5}{2} \quad \quad \quad x = -10 \end{aligned}$$

On doit rejeter cette racine car une dimension ne peut pas être négative.

La largeur du cache est donc de 2,5 cm.

Ex : La somme de deux nombres est 14 et leur produit est 37. Quels sont ces nombres ?

Soit x , le premier nombre
 y , le deuxième nombre

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x &= 14 - y \end{aligned}$$

On isole une lettre.

$$xy = 37$$

$$(14 - y)(y) = 37$$

$$14y - y^2 - 37 = 0$$

$$y^2 - 14y + 37 = 0$$

$$(y^2 - 14y + 49) - 49 + 37 = 0$$

$$(y - 7)^2 - 12 = 0$$

$$(y - 7)^2 = 12$$

$$y - 7 = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$y = 7 + 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad y = 7 - 2\sqrt{3}$$

Si $y = 7 + 2\sqrt{3}$ alors

$$x = 14 - (7 + 2\sqrt{3})$$

$$x = 14 - 7 - 2\sqrt{3}$$

$$x = 7 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{et si } y = 7 - 2\sqrt{3}, x = 7 + 2\sqrt{3}$$

Les deux nombres sont $7 - 2\sqrt{3}$ et $7 + 2\sqrt{3}$.

*** 4.4 Applications p. 172 # 55, 56, 58, 60, 61, 62, 64, 66ac, 67ac, 68

Mathématiques 30321

◇ formule quadratique

Une quatrième méthode pour trouver les racines est la formule quadratique qui est trouvée à partir de la complétion du carré.

Si on part de l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$ et qu'on fait la complétion du carré, on arrive à l'équation quadratique.

Cas général

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a}) = \pm \frac{(b^2 - 4ac)}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{(b^2 - 4ac)}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Donc } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$2[(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) - \frac{9}{16} - \frac{1}{2}] = 0$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{8}{16} = 0$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{17}{16} = 0$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{17}{16}$$

$$(x + \frac{3}{4}) = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Ex : Résous $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Pour remplacer dans la formule, on prend $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

*** 4.5 La formule quadratique p. 178 # 1, 7, 13, 15, 21, 23, 25, 27, 31, 33, 41, 43, 47, 49, 51, 53

Mathématiques 30321

Applications et résolution de problèmes

Ex : Un camion qui transporte l'équipement d'un groupe rock va de Calgary à Spokane, soit une distance de 720 km. Pendant le trajet du retour, le camion augmente sa vitesse moyenne de 10 km/h. Si l'aller et retour a duré 17 heures en tout, quelle était la vitesse moyenne du camion de Calgary à Spokane ?

On sait que la formule de la vitesse est de $V = \frac{d}{t}$

| Trajet | Distance (km) | Vitesse = (km/h) | Temps (h) |
|----------------------|---------------|------------------|--------------------|
| De Calgary à Spokane | 720 | x | $\frac{720}{x}$ |
| De Spokane à Calgary | 720 | x + 10 | $\frac{720}{x+10}$ |

Si l'aller et le retour ont un total de 17h, donc

$$\frac{720}{x} + \frac{720}{x+10} = 17 \quad \text{Multiplie chaque membre par } x(x+10)$$

$$720(x+10) + 720x = 17x(x+10)$$

$$720x + 7200 = 17x^2 + 170x$$

$$0 = 17x^2 - 1270x - 7200$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1270) \pm \sqrt{(-1270)^2 - 4(17)(-7200)}}{2(17)}$$

$$x = \frac{1270 \pm \sqrt{2102500}}{34}$$

$$x = \frac{1270 \pm 1450}{34}$$

$$x = \frac{1270 + 1450}{34} = 80 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1270 - 1450}{34} = \frac{-180}{34} = \frac{-90}{17}$$

On doit rejeter la vitesse négative.

On veut savoir la vitesse de Calgary à Spokane est x donc 80km/h.

*** 4.5 La formule quadratique p. 179 # 59, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72

Mathématiques 30321

- Détermination de la règle d'une fonction quadratique à partir :
 - ❖ Du sommet et d'un autre de ses points

Si on connaît le sommet (p, q) d'une parabole et d'une coordonnée (x, y) , on remplace dans l'équation canonique.

Ex : Écris une équation de la parabole dont le sommet est le point $(-1, 4)$ et qui passe par le point $(-2, 2)$.

$$\begin{aligned}y &= a(x - p)^2 + q \\2 &= a(-2 - (-1))^2 + 4 \\2 &= a(-2 + 1)^2 + 4 \\2 &= a(-1)^2 + 4 \\2 &= a + 4 \\-2 &= a \\ \text{donc } y &= -2(x + 1)^2 + 4\end{aligned}$$

- ❖ Des zéros réels et d'un autre de ses points

Ex : forme une équation quadratique dont les racines sont 2 et -4.

$$\begin{aligned}x &= 2 \text{ et } x = -4 \\x - 2 &= 0 \text{ et } x + 4 = 0 \\ \text{donc } (x - 2)(x + 4) &= 0 \\x^2 - 2x + 4x - 8 &= 0 \\x^2 + 2x - 8 &= 0\end{aligned}$$

*** p. 162 # 89, 90

*** p. 173 # 72

Révisions p. 232 4.2 # 12, 16, 18, 20, 22, 23 4.3 # 24, 26, 28 4.4 # 34, 36, 38, 40, 43 4.5 # 44, 46, 48, 50, 54, 56